

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 57

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Back to esempio precedente Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} u'' = f & \text{in } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Data $f \in L^2((a,b))$ a media nulla, trovare $u \in H^2$ a media nulla che soddisfa equ. + NBC.

Via Lax-Milgram Riscriviamo nella forma

$$\int_a^b u(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \dots \text{ da precisare}$$

Poniamo $\hat{H} := \{u \in H^1((a,b)) : \int_a^b u(x) dx = 0\}$

$\uparrow$ Hilbert rispetto al solito prodotto scalare

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx \quad \forall (f, g) \in \hat{H}.$$

Si verifica che $\hat{H}$ è Hilbert anche rispetto a $\langle\langle f, g \rangle\rangle$.

→ bilinearità e non-negatività sono ovvie

→ il fatto che sia definito positivo richiede che in $\hat{H}$ valga

$$\int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$$

Ora $\int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f \text{ costante} \Rightarrow f \equiv 0$
 $\uparrow$ media nulla

→ Andrebbe verificata la completezza. Supponiamo $\{u_n\}$ di Cauchy, dunque di limitata, rispetto alla norma $\int_a^b u_n(x)^2 dx$.

Allora $u_n \rightarrow v_\infty$ in $L^2((a,b))$ (sono di Cauchy)

e a meno di s.succ. $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ uniformemente. Al solito modo si verifica che $u_\infty = v_\infty$ e u_∞ è l'unica primitiva di v_∞ che ha media nulla.

Per il Lemma della sotto-sotto sappiamo ora che $u_n \rightarrow u_\infty$ unif (TUTTA la successione). Dunque $u_\infty \in \hat{H}$ e la convergenza è rispetto alla norma di $\hat{H}$.

Ora poniamo $L: \hat{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(\varphi) := - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quella dell'equazione (anche solo } L^2)}}{f(x)} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \hat{H}$$

Il claim è che L è lineare (ovvio) e continuo wrt alla norma di $\hat{H}$, in quanto

$$|L(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \cdot \text{cost} \|\varphi\|_{\hat{H}}$$

Per l'ultima disuguaglianza serve una stima del tipo

$$\int_a^b \varphi(x)^2 dx \leq \text{cost} \int_a^b \ddot{\varphi}(x)^2 dx \quad \forall \varphi \in \hat{H}$$

e questa è proprio Wirtinger.

Per il teorema di Riesz (duale di un Hilbert) esiste $u \in \hat{H}$ t.c.

$$L(\varphi) = \int_a^b \ddot{u}(x) \ddot{\varphi}(x) dx = \langle\langle u, \varphi \rangle\rangle_{\hat{H}} \quad \forall \varphi \in \hat{H}$$

Claim: questa u è la soluzione del nostro problema.

Dobbiamo dim. che $u \in H^2$, u risolve l'equ., u soddisfa NBC.

Per ipotesi sappiamo che

$$\int_a^b \ddot{u}(x) \ddot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \hat{H} \quad (*)$$

SE l'uguaglianza fosse vera per ogni $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$, avremmo gratis l'equ., cioè $f = (\ddot{u})'$ nel senso delle derivate deboli.

Però c'è la seccatura che se φ dev'essere avere media nulla 😞

Cosa ci salva? Non abbiamo ancora usato che f ha media nulla.

Una volta che f ha media nulla, succede che ^{anche se è solo $L^2(a,b)$}

$$(*) \text{ vera } \forall \varphi \in \hat{H} \Rightarrow (*) \text{ vera } \forall \varphi \in H^1(a,b)$$

e a questo punto è fatta. Perché funziona? Ogni $\varphi \in H^1(a,b)$ la posso scrivere come

$$\varphi(x) = c + \hat{\varphi}(x)$$

$\uparrow \in \hat{H}$

(basta scegliere c in maniera tale che $\varphi(x) - c$ abbia media nulla) A questo punto

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= - \underbrace{\int_a^b f(x) c dx}_{=0} - \int_a^b f(x) \hat{\varphi}(x) dx \\ &\quad \text{perché } f \text{ ha media nulla} \\ &= \int_a^b \ddot{u}(x) \hat{\varphi}(x) dx \\ &\quad \uparrow \text{uguali} \\ &= \int_a^b \ddot{u}(x) \check{\varphi}(x) dx \end{aligned}$$

Una volta che $(*)$ vale per ogni $\varphi \in H^1(a,b)$, uso se $\varphi \in C_c^\infty$ e ottengo $u \in H^2(a,b)$ e $\ddot{u} = f$

A questo punto $\ddot{u}(a)$ e $\ddot{u}(b)$ hanno senso e integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \int_a^b \ddot{u}(x) \check{\varphi}(x) dx = - \int_a^b \ddot{u}(x) \varphi(x) dx \\ &\quad + \ddot{u}(b) \check{\varphi}(b) - \ddot{u}(a) \check{\varphi}(a) \end{aligned}$$

Gli integrali al LHS e RHS sono uguali, quindi resta

$$u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) = 0$$

$\uparrow$ non sono ben definiti
su $\hat{H}$

$\forall \varphi \in C^1([a,b])$
a media nulla

Abbiamo abbastanza libertà per avere $\varphi(b)=1$ e $\varphi(a)=0$ (o viceversa) da cui le NBC.

A questo punto è ben definito $A: \hat{H} \rightarrow \hat{H}$
 $f \rightarrow u$

Al solito modo si verifica che è lineare, simmetrico, compatto.

Per la compattezza, data $\{f_n\} \subseteq L^2(a,b)$ limitata, otteniamo che $\{u_n\}$ verifica le hp di A.A. (equi $\frac{1}{2}$ -Hölder ed equiuniformità grazie alle NBC). A questo punto le $\{u_n\}$ sono equi-Lip e sono equiuniformi (grazie alla media nulla).

Ancora una volta si può applicare il te. spettrale ed ottenere una base di $\hat{H}((a,b))$ costituita da autovettori dell'operatore.

Oss. Non abbiamo mai usato che $f \in H^1$, ma solo che ha media nulla. Quindi volendo abbiamo costruito un operatore

$$A: L^2 \text{ a media nulla} \rightarrow L^2 \text{ a media nulla}$$

Quindi quella ottenuta è una base ortonormale di L^2 a media nulla. Chi è questa base?

Nel caso modello $(a,b) = (0,\pi)$, ragionando come nel caso Dirichlet, troviamo che gli autovalori sono $-m^2$ (gli "autovalori" della derivata seconda) e una base ortogonale è $u_m(x) = \cos(mx)$ $\hat{L}u_m = -m^2 u_m$ $m \geq 1$ intero

Oss. Volendo una base ortogonale (o ortonormale) di tutto $L^2((a,b))$, basta aggiungere una funzione costante, che è come ammettere $\cos(mx)$ con $m=0$.
 (Nota bene: le costanti sono ortogonali a tutte le $u_n(x)$ precedenti, proprio perché avevano media nulla).

Morale:

→ Serie di F. di soli seni = autovettori di (inverte della) derivata seconda con DBC

→ " " " " coseni = " " " " NBC

→ " " " " con seni e coseni = " " " " PBC
 a parità di intervallo, l'argomento non è lo stesso di sopra

$\{\sin(mx)\}$ base di $L^2((0,\pi))$

$\{\cos(mx)\}$ base di $L^2((0,\pi))$

$\{\sin(mx), \cos(mx)\}$ base di $L^2((0,2\pi))$ ↓↓

$\{\sin(\frac{m}{2}x)\}$ base di $L^2((0,2\pi))$

$\{\cos(\frac{m}{2}x)\}$ base di $L^2((0,2\pi))$

Esercizio Trattare per esteso il caso delle PBC

$$\begin{cases} u'' = f \\ u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{cases}$$

Utilizzando i 3 metodi (elementare, variazionale, Lax-Milgram)

Qualche osservazione c'è in quanto

$$0 = u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

e quindi se f a media nulla