

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 56

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

L'ESEMPIO (Inverso del Laplaciano)

↑ derivata 2^a in dimensione 1

Dato $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, data $f \in L^2((a,b))$, esiste unica $u \in L^2((a,b))$
t.c.

↑ Hilbert

$$\begin{cases} \ddot{u} = -f & \text{in } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{DBC})$$

Definiamo un operatore $A: L^2((a,b)) \rightarrow L^2((a,b))$
 $f \rightarrow u$

Si tratta di un operatore lineare, simmetrico, compatto.

Buona definizione $\forall f \in L^2$ esiste unica $u \in H^2$ che risolve

Si può fare in almeno 3 modi diversi.

↑ poi nel definire A si usa solo che $u \in L^2$

1° - via elementare Poniamo

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

$$\tilde{F}(x) := \int_a^x F(t) dt$$

↑ doppia primitiva

poi cerchiamo costanti A e B tali che $u(x) = \tilde{F}(x) + Ax + B$ risolva il problema dato. In questo modo si ottiene esistenza, unicità e regolarità.

2° - Via variazionale L'osservazione è che u risolve il pbm. dato se e solo se u risolve

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + f u \right) dx : u \in H_0^1((a,b)) \right\}$$

↑ DBC

Da qui si conclude con le solite tecniche.

3° - Via Lax - Milgram Scriviamo l'equazione data come

$$\int \ddot{u} \varphi = \int f \varphi \quad \rightsquigarrow \quad \int \ddot{u} \varphi \, dx = - \int f \varphi = L(\varphi)$$

||

$\langle u, \varphi \rangle =$ prodotto scalare strano in H_0^1

Si dimostra che RHS è un'applicazione lineare e continua rispetto a questo prodotto scalare strano e come tale si rappresenta come prodotto scalare

Linearità e simmetria La linearità è quasi ovvia. La simmetria segue dall'integrazione per parti.

Supponiamo

$$\begin{array}{ll} \ddot{u} = f & A f = u \\ \ddot{v} = g & A g = v \end{array}$$

Allora

$$\langle A f, g \rangle = \int_a^b u \ddot{v} \, dx = \int_a^b \ddot{u} v \, dx = \langle f, A g \rangle$$

int. per parti + DBC

$$\int_a^b u \ddot{v} \, dx = \underbrace{[u \dot{v}]_a^b}_{\substack{0 \text{ per} \\ \text{DBC su } u}} - \int_a^b \dot{u} \dot{v} \, dx = - \underbrace{[\dot{u} v]_a^b}_{\substack{0 \text{ per} \\ \text{DBC su } v}} + \int_a^b \ddot{u} v \, dx$$

Compattezza SLOGAN: un operatore che rende le cose più regolari ha buone prob. di essere compatto !!

Sia $\{f_n\} \subseteq L^2((a,b))$ una succ. limitata. Vogliamo dim. che $\{u_n\}$ è rel. cpt. in $L^2((a,b))$, ma lo è pure in ambienti più regolari !!

Consideriamo $\{\dot{u}_n\}$. Sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder (le derivate sono proprio le f_n) e sono equilimitate (grazie a Poincaré esiste $x_n \in (a,b)$ t.c. $\dot{u}_n(x_n) = 0$).

Ora consideriamo le $\{u_n\}$. Sono equi Lipschitz (poiché $\{\dot{u}_n\}$ sono equilimitate) e sono equilimitate (grazie alle DBC).

Per AA esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif., e quindi pure L^2 .

Oss. La compattezza è molto più forte. Data $\{f_n\} \subseteq L^2(a,b)$ limitata, troviamo $n_k \rightarrow +\infty$ t.c.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty$$

unif. in $[a,b]$

$$\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty$$

unif. in $[a,b]$

$$\ddot{u}_{n_k} \rightarrow \ddot{u}_\infty$$

debole in $L^2(a,b)$

Conseguenza Esiste una base di $L^2(a,b)$ costituita da autovettori dell'operatore precedente, cioè

$$A f_n = \lambda_n f_n \quad (\lambda_n \rightarrow 0)$$

Ponendo $A f_n = u_n$, abbiamo

$$\ddot{u}_n = f_n = \frac{1}{\lambda_n} A f_n = \boxed{\frac{1}{\lambda_n}} u_n \quad \nearrow -\infty$$

Oss. Le u_n le possiamo pensare come autovettori della derivata seconda, ma formalmente sono autovettori dell'inverso della derivata seconda con DBC.

Si possono trovare esplicitamente

Esempio con $(a,b) = (0,\pi)$ $\ddot{u} = \lambda u$

$\uparrow$ moralmente è l'inverso

Stabiliamo il segno di λ . Moltiplico per u e integro per parti

$$\int_0^\pi \lambda u^2 dx = \int_0^\pi \ddot{u} u dx = - \int_0^\pi \dot{u}^2 dx$$

Da qui deduciamo $\lambda < 0$. A questo punto

$$u(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda} x) + b \sin(\sqrt{-\lambda} x)$$

Imponendo $u(0) = 0$ troviamo $a = 0$.

Imponendo $u(\pi) = 0$ troviamo che $\lambda = -n^2$ e b è libero, come giustamente uno si aspetta.

Questo dimostra per via involutiva che $\{\sin(nx)\}$ è una base ortogonale (si rende facilmente ortonormale) di $L^2(0,\pi)$.

Oss. Tutti gli elementi della base si annullano al bordo, e questi generano tutto $L^2((0, \pi))$, comprese le funzioni che divergono al bordo o la funzione costante zero.

Non c'è nessuna condizione perché la convergenza è solo L^2 .

Esempio $\begin{cases} \ddot{u} = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$ (Come prima, ma con NBC)
 $\uparrow$ omogenee, altrimenti niente linearità!

Annuncio: qualche piccolo problema c'è!!

Ragione: $0 = u(b) - u(a) = \int_a^b \dot{u}(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Quindi se f NON ha media nulla non c'è speranza di poter risolvere!

Supponiamo anche di aver risolto. Allora se u è soluzione, anche $u + \text{cost}$ è soluzione, quindi niente unicità.

Soluzione: includiamo con H lo spazio delle $f \in L^2((a, b))$ t.c. $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Si verifica che è un Hilbert rispetto alla solita struttura.

A questo punto l'invertita della derivata seconda definisce un operatore $A: H \rightarrow H$ lineare, simmetrico e compatto.

Buona positura Tre metodi come prima.

Via elementare Poniamo $u(x) = \hat{F}(x) + B$ e cerchiamo B in maniera che u abbia media nulla. Le NBC sono automatiche se f ha media nulla.

Via variazionale Cerchiamo di risolvere

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + f u \right) dx : u \in H^1(a,b), \int_a^b u dx = 0 \right\}$$

Aver posto la media nulla garantisce l'esistenza di un punto in cui u si annulla, il che è fondamentale in fase di compattezza.

Questo vincolo si traduce in un moltiplicatore di Lagrange quando si ricava E-L-E, quindi si ottiene

$$\begin{cases} \ddot{u} = f + \lambda \\ \dot{u}(a) = \dot{u}(b) = 0 \end{cases}$$

Integrando la prima equ. in (a,b) si ottiene

$$0 = \dot{u}(b) - \dot{u}(a) = \int_a^b \ddot{u}(x) dx = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_0 + \lambda(b-a)$$

e quindi per forza $\lambda = 0$.

Quindi la sol. del pbm. variazionale risolve il nostro pbm.

Via Lax-Milgram Seme che $\langle\langle u, \varphi \rangle\rangle := \int_a^b \dot{u} \dot{\varphi} dx$ sia un prodotto scalare nello spazio

$$\hat{H} := \{ u \in H^1(a,b) : \int_a^b u dx = 0 \}$$

In particolare seme che sia definito positivo, cioè $\int_a^b \dot{u}^2 dx > 0$ se $u \neq 0$. Questo sarebbe falso in $H^1(a,b)$

senza condizioni (pensare a $u = \text{costante}$), ma diventa vero con la media nulla grazie a Wirtinger.

Anche la media nulla di f seme per ambientare il problema in $\hat{H}$.