

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 55

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Consideriamo $H := L^2((0,1))$ e sia $A: H \rightarrow H$ l'operatore definito per ogni $u \in H$ da

$$[Au](x) = xu(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

(a) A è lineare, simmetrico, Lipschitz

[†] banale

Verifichiamo la simmetria rispetto al prod. scalare di L^2

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 xu(x) \cdot v(x) dx = \int_0^1 u(x) \cdot xv(x) dx = \langle u, Av \rangle$$

Essendo l'operatore lineare continuità e lip. sono equiv. alla limitatezza, cioè $\|Au\| \leq L\|u\|$ per ogni $u \in H$.

In questo caso

$$\|Au\|^2 = \int_0^1 [xu(x)]^2 dx = \int_0^1 x^2 u(x)^2 dx \leq \int_0^1 \overset{\uparrow \leq 1}{x^2} u(x)^2 dx = \|u\|^2$$

quindi è lip. e una possibile costante è 1.

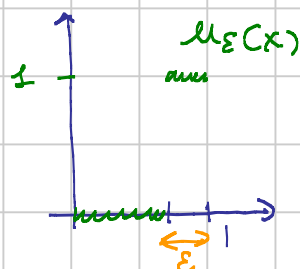
(b) Determinare la costante di Lip. Sia L tale costante.

[Nota bene: il p.to precedente mostra che $L \leq 1$, ma NON che $L=1$]

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e consideriamo $u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (1-\varepsilon, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\text{Si vede che } \|u_\varepsilon\|^2 = \int_0^1 u_\varepsilon(x)^2 dx = \varepsilon$$

[↑]
tendono a concentrarsi dove x assume il valore massimo



Allo stesso modo

$$\|Au_\varepsilon\|^2 = \int_{1-\varepsilon}^1 x^2 dx \geq \varepsilon (1-\varepsilon)^2$$

↑
misura
conten. di integ. gr.

↑
stima dal basso per
integrandi

Ma allora

$$\varepsilon (1-\varepsilon)^2 = \|Au_\varepsilon\|^2 \leq L^2 \|u_\varepsilon\|^2 = L^2 \varepsilon$$

da cui $L \geq 1-\varepsilon$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario segue che $L \geq 1$.

Oss. importante Non esiste $u \neq 0$ tale che $\|Au\|^2 = \|u\|^2$

Dovrebbe essere $\int_0^1 x^2 u(x)^2 dx = \int_0^1 u(x)^2 dx$, cioè

$$\int_0^1 \underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0} \underbrace{u(x)^2}_{\geq 0} dx = 0, \text{ quindi } u(x) \equiv 0$$

(c) Dimostrare che A è iniettivo ma non surgettivo

Iniettivo: $Au=0 \Leftrightarrow x u(x)=0$ q.o. in $(0,1) \Leftrightarrow u=0$ q.o. in $(0,1)$

Surgettivo: dico che non lo è. Occorre trovare $g \in L^2((0,1))$ che non si scrive come Au .

Dovrebbe essere

$$x u(x) = g(x) \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

cioè

$$u(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \text{" " "}$$

Basta fare in modo che

$$\int_0^1 g(x)^2 dx < +\infty \quad \text{ma} \quad \int_0^1 \frac{g(x)^2}{x^2} dx = +\infty$$

Basta prendere $g(x) \equiv 1$.

Oss. In dimensione infinita esistono anche operatori NON iniettivi, ma surgettivi.

Un esempio è lo shift a sx dimenticando una componente:

$$(u_1, u_2, u_3, \dots) \rightarrow (u_2, u_3, u_4, \dots)$$

(d) Dimostrare che A non ha autovalori

Se fosse $Au = \lambda u$, dovrebbe essere vero che

$$xu(x) = \lambda u(x) \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

cioè

$$(x - \lambda)u(x) = 0 \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

ma questo è possibile $\Leftrightarrow u(x) = 0$ per q.o. $x \in (0,1)$, ma così non vale.

(e) Dimostrare che A NON è compatto

Modo con il cannone: se fosse compatto, essendo simmetrico, vorrebbe dire che $L^2((0,1))$ ammette una base di autovettori di A , e invece A non ha nemmeno un autovalore.

A mano: devo costruire $\{u_n(x)\} \subseteq L^2((0,1))$ limitata tale che $\{xu_n(x)\}$ NON ammette s.succ. convergenti forte.

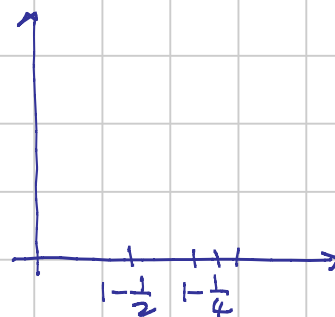
Come dimostro che non esistono s.succ. convergenti? Mostrando che non esistono s.succ. di Cauchy.

Idea: considerare $\{u_n(x)\}$ di norma unitaria con i supporti disgiunti e lontani da zero

Consideriamo $x_n := 1 - \frac{1}{2^n}$ per $n = 0, 1, 2, \dots$

Poniamo quindi

$$u_n(x) := \begin{cases} (\sqrt{2})^{n+1} & \text{per } x \in [x_n, x_{n+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



In questo modo

$$\|u_n\|^2 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{2^n} dx = 2^{n+1} \underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e inoltre

$$\|x u_n(x) - x u_m(x)\|^2 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x^2 2^{n+1} dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} x^2 2^{m+1} dx$$

se $n \neq m$

i supporti sono disgiunti, quindi per ogni x al più una delle 2 è $\neq 0$.

$$= 2,$$

il che impedisce di avere s.succ. di Cauchy !!

(f) Determinare inf e sup di $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2}$ in $H \setminus \{0\}$

Come da teoria, posso restringermi alle u di norma 1.

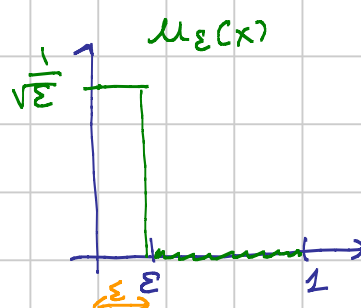
Quindi devo fare inf e sup di

$$\left\{ \int_0^1 x u(x)^2 dx : \int_0^1 u(x)^2 dx = 1 \right\}$$

È evidente che $\inf \geq 0$ e $\sup \leq 1$. Per dimostrare che sono uguali basta utilizzare delle u concentrate solo all'inizio o alla fine dell'intervallo.

Ad esempio, ponendo

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{se } x \in (0, \varepsilon) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



abbiamo che $\int_0^1 u_\varepsilon(x)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$ e

$$\int_0^1 x u_\varepsilon(x)^2 dx = \int_0^\varepsilon x \cdot \frac{1}{\varepsilon} dx = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

il che mostra che $\inf = 0$.

(g) Sempre nello spirito degli autovalori / autovettori studiate, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, iniettività e surgettività di $A - \lambda \text{Id}$.

Nota bene: in dimensione finita vale

$A - \lambda \text{Id}$ non iniettivo $\Leftrightarrow A - \lambda \text{Id}$ non surg. $\Leftrightarrow \lambda$ autovalore

$$[(A - \lambda \text{Id})u](x) = x u(x) - \lambda u(x) = (x - \lambda) u(x)$$

Questa è sempre iniettiva perché $(x - \lambda) u(x) = 0$ q.o. in $(0, 1)$ se e solo se $u(x) = 0$ q.o. in $(0, 1)$.

La surgettività si riduce alla seguente implicazione

$$\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty \quad ? \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)^2}{(x - \lambda)^2} dx < +\infty$$

e questo è vero se e solo se il denominatore non si annulla mai in $[0, 1]$ (estremi compresi), il che accade $\Leftrightarrow \lambda > 1$ oppure $\lambda < 0$. Quindi

- $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \Rightarrow A - \lambda \text{Id}$ è surgettivo
- $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow A - \lambda \text{Id}$ NON è surgettivo (non riesco a risolvere $(\text{Id} - \lambda A)$)

Oss. (Molto brutal) $\exists \lambda \in [0, 1]$ soddisfanno almeno una delle condizioni per essere autovalori in dimensione finita, quindi si possono considerare come "autovalori" in senso molto esteso con delle delta di Dirac come "autovettori"

Oss. finale Questo esercizio si estende ad operatori

$$A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

definiti da $[Au](x) = a(x) \cdot u(x) \quad \forall x \in \Omega$

$\uparrow$
funzione
assegnata

Ad esempio

(a) A è ben definito e continuo e lipschitziano se e solo se $a \in L^\infty(\Omega)$ e la costante di Lip di A è proprio $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$

Stessa dimostrazione di sopra

(b) A ammette l'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\text{meas} \{x \in \Omega : u(x) = \lambda\} > 0$$

ed in tal caso il relativo autospazio ha sempre dimensione infinita.

(c) Cui sono $\inf$ e $\sup$ del quoziente di Rayleigh?
— 0 — 0 —