

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 51

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio 1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ una palla (ma si può fare in insiemi più generali).

Discutere la seguente implicazione

$$u \in H^k(\Omega) \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^k(\Omega)$$

$$\text{Caso } k=0, \text{ cioè } u \in L^2 \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in L^2$$

Falso già in dimensione 1.

Ad esempio

$$u = \frac{1}{|x|^{1/3}} \in L^2((-1,1)) \quad \text{ma} \quad u^2 = \frac{1}{|x|^{2/3}} \notin L^2((-1,1))$$

Stesso discorso per $\frac{1}{|x|^\alpha}$ con $\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}$

Esempi analoghi valgono in ogni dimensione.

$$\text{Caso } k=1, \text{ cioè } u \in H^1 \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^1$$

In dimensione $d=1$ è vero, perché ci sono due cose da controllare

- $u^2 \in L^2$, il che è vero perché u è continua
- $(u^2)' = 2u u' \in L^2$, il che è vero perché è cont. $\cdot L^2$, cioè limitata $\cdot L^2$ che è ancora L^2 .

In dimensione $d=2$ è falso. Posto $v = u^2$ dobbiamo verificare

- $v \in L^2$, cioè $u \in L^4$, il che è vero per immersione
- v_x e v_y sono in L^2 , cioè $u u_x \in L^2$ e $u u_y \in L^2$
 $\uparrow \quad \uparrow$ sta in L^2

sta in L^q una uou per $q=+\infty$

C'è speranza di costruire un esempio quando $u \in H^1 \setminus L^\infty$.

In una lezione prec. abbiamo fatto esempi del tipo $|\log |x||^\alpha$

$$u = \frac{|\log|x||^\alpha}{\varphi''(r)} \in H^1 \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi'(r)|^2 r dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{|\log r|^{2\alpha-2}}{r^2} r dr < +\infty$$

$$= \int_0^R \frac{1}{r |\log r|^{2-2\alpha}} dr$$

$$\Leftrightarrow 2-2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$$

Quindi $u \in H^1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$ e $v = u^2 \in H^1 \Leftrightarrow 2\alpha < \frac{1}{2}$.

Quindi se prendo $\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ (ad esempio $\alpha = \frac{1}{8}$) ho un controesempio.

Oss. Ogni controesempio in dim 2 implica un controesempio in dim $d \geq 2$ (basta considerare funzioni che dipendono solo dalle prime 2 variabili).

Caso $k=2$, cioè $u \in H^2 \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^2$

In dimensione 1, non dovrebbero esserci problemi.

- $u^2 \in L^2$ (continua)
- $2u\dot{u} \in L^2$ (continua)
- $2\dot{u}^2 + 2u\ddot{u} \in L^2$ (continua² + continua · L^2)

In dimensione 2, va bene ugualmente

- $u^2 \in L^2$ ($u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,q}$ per ogni q finito $\Rightarrow u$ cont. e anzi u Hölderiana di ogni esponente)
- u_x e u_y in L^2 , cioè $2u u_x \in L^2$ e $2u u_y \in L^2$
 $\uparrow$ continua $\uparrow$ L^2 $\circ$
- u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} in L^2 . Ad esempio $2u_x^2 + 2u u_{xx}$
 $\uparrow$ $\uparrow$ cont. $\uparrow$ L^2
 $u_x \in L^4$ per immersione

Stessa cosa con v_{yy} e anche per la derivata mista

$$v_{xy} = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ L^4}}{u_y} \underset{\substack{\uparrow \\ L^4}}{u_x} + 2 \underset{\substack{\uparrow \text{cont.} \\ L^2}}{u} \underset{\substack{\uparrow \\ L^2}}{u_{xy}} \quad (\text{ricordiamo che } L^4 \cdot L^4 = L^2)$$

Oss. La stessa dimostrazione funziona fino alla dim. $d=4$ perché il punto essenziale è l'immersione di H^1 in L^4 , che vale fino a $d=4$. **FALSA, abbiamo usato anche che u è continua**

Per $d \geq 5$ è probabile che sia falso, e per trovare i controesempi occorre cercare di violare l'immersione $H^1 \rightarrow L^4$.

Consideriamo funzioni radiali $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ $\varphi(r) = \frac{1}{r^\alpha}$

Abbiamo visto in lezioni precedenti che

$$u \in H^2 \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi''(r)|^2 r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{1}{r^{2(\alpha+2)}} r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+4 - d+1 < 1 \Leftrightarrow 2\alpha < d-4$$

$$u^2 \in H^2 \Leftrightarrow 4\alpha < d-4$$

Abbiamo che $u \in H^2$ e $u^2 \notin H^2$ se $2\alpha < d-4$ e $4\alpha \geq d-4$
 $4\alpha < 2d-8$

Mettendo insieme deve essere $d-4 \leq 4\alpha < 2d-8$. Un tale α esiste se e solo se $d > 4$. Quindi in dimensione $d \geq 4$ abbiamo il controesempio.

Oss. L'implicazione $u \in H^2 \Rightarrow u$ continua, o anche solo $u \in L^\infty$ vale solo in dimensione $d \leq 3$

$d=2$: $u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,q} \forall q$ finito $\Rightarrow u$ è continua

$$d=3: u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,6} \quad (2^* = \frac{p^d}{d-p} = \frac{6}{3-2}) \Rightarrow u \text{ è continua} \\ (\text{anzi } \frac{1}{2}\text{-Hölder})$$

$$d=4: u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,4} \Rightarrow u \in L^q \text{ per ogni } q < +\infty \\ (\text{ma in generale } u \notin L^\infty)$$

Si riesce a fare un controesempio $u \in H^2$, ma $u^2 \notin H^2$ anche per $d=4$?

Slogan: usa i logaritmi !!

$$\text{Proviamo con } u(x) = |\log|x||^\alpha \quad f(r) = |\log r|^\alpha$$

Allora

$$f'(r) = -\alpha |\log r|^{d-1} \frac{1}{r}$$

$$f''(r) = +\alpha(\alpha-1) |\log r|^{d-2} \frac{1}{r^2} + \alpha |\log r|^{d-1} \frac{1}{r^2}$$

termine più pericoloso

$$\text{Quindi } u \in H^2 \Leftrightarrow \int_0^R |\log r|^{2d-2} \frac{1}{r^4} - r^3 \overset{d-1}{\downarrow} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{1}{r} \frac{1}{|\log r|^{2-2d}} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 2-2d > 1 \Leftrightarrow d < \frac{1}{2}$$

Analogamente $u^2 \in H^2 \Leftrightarrow 2d < \frac{1}{2}$, cioè $d < \frac{1}{4}$.

Prendendo $d = \frac{1}{3}$ abbiamo controesempio anche in dimensione 4.

Caso $k > 2$, cioè $u \in H^k \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^k$

In dimensione $d=1$, dovrebbe essere tranquillo.

• $u \in L^2$ (banale perché è continua)

• $\dot{u} = 2u \dot{u} \in H^{k-1}$

$\uparrow$
 C^{k-1}

$\uparrow$ H^{k-1}

e il prodotto resta H^{k-1}

In dimensione $d=2$, dovrebbe essere tranquillo

- $u \in L^2$ (vero per continuità)

- u_x e u_y in L^2 . Ora $u_x = 2u u_x$
 $\uparrow \text{cont} \quad \uparrow L^2$

- u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} in H^{k-2} . Basta controllarne una.

$$u_{xx} = 2u_x^2 + 2u u_{xx} \in H^{k-2}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow H^{k-2}$
 $C^{k-2} \quad \odot$

su questo usiamo l'ipotesi induttiva, nel
senso che $u_x \in H^{k-1} \Rightarrow u_x^2 \in H^{k-1}$

In dimensione $d=3$, funziona allo stesso modo, perché
abbiamo l'ipotesi induttiva (grazie al fatto che è stato
dimostrato per $k=2$) e il fatto che $u \in H^k \Rightarrow u \in C^{k-2}$.

Dalla dimensione $d=4$ in poi, le cose si complicano
ulteriormente.

Oss. Allo stesso modo si trattano le implicazioni

$$u \in H^k \Rightarrow \sin u \in H^k$$

$\uparrow$
 $\sin$

con l'unica eccezione che $u_x = \cos u \cdot u_x$

$$u_{xx} = -\sin u \cdot u_x^2 + \cos u \cdot u_{xx}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow L^2$
limitato gratis limitato

quindi basta l'immersione $H^1 \rightarrow L^4$, che vale da $d=4$
compresa in poi.

— o — o —