

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 50

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $\Omega = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$

$$F(u) := \int_{\Omega} \{ |\nabla u|^2 + \cos u \} dx dy$$

$$\min \{ F(u) : u \in H^1(\Omega), u \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

Oss. La condizione $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$ ha senso in $H^1(\Omega)$ perché la traccia è ben definita. Equivalentemente possiamo scrivere

$$\min \{ F(u) : u \in H_0^1(\Omega) \}.$$

La formulazione debole è già scritta.

Compattezza Supponendo $F(u_n) \leq M$ deduciamo che

$$\begin{aligned} M \geq F(u_n) &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + \underbrace{\cos u_n}_{\geq -1}) dx dy \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx dy - \text{meas}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq M'$$

Da qui non si arriva ad una stima $\|u_n\|_{L^\infty}$ come in una variabile.

Tuttavia possiamo concludere che $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$

grazie a Poincaré (e qui si usa che $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$)

A questo sappiamo che $\|u_n\|_{1,2,\Omega} \leq M''$
 $\uparrow$ full norm in $H^1(\Omega)$

A questo punto per Rellich - Kondrachov esiste s.succ.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ in } L^2(\Omega) \text{ forte}$$

(anzi in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < 2^* = +\infty$)

e estraendo ulteriormente

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ puntuale dominato.}$$

Brutalmente: Poincaré + RK hanno sostituito bound $L^\infty + AA$.

SCI Per sci della norma

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2 dx dy \geq \int_{\Omega} |\nabla u_\infty|^2 dx dy$$

e inoltre

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \cos(u_{n_k}) dx dy = \int_{\Omega} \cos(u_\infty) dx dy$$

$\uparrow$
puntuale q.o. e dominata da 1

e quindi $\liminf_{k \rightarrow +\infty} F(u_{n_k}) \geq F(u_\infty)$.

Regolarità Qui di sotto è una pena

Picaviamo ELE Sia u p.to di min. Consideriamo

$$\varphi(t) := F(u + tv) \quad \text{con } v \text{ "opportuna"}$$

Allora

$$\varphi'(0) = \int_{\Omega} \{ 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \sin u \cdot v \} dx dy = 0$$

$\uparrow$
basta osserv. che si può derivare sotto segno di integrale

Questo ci dice che

$$-\int_{\Omega} 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx dy = -\int_{\Omega} \sin u \cdot v$$

Per quali v vale questa formula?

- Di sicuro per tutte le $v \in C_c^\infty(\Omega)$
- con un facile argomento di approx. si estende a tutte le $v \in H_0^1(\Omega)$ (si tratta della definizione stessa di $H_0^1(\Omega)$)

Quella scritta sopra è la formulazione debole dell'eq. semilineare

$$\Delta u = -\sin u$$

Nota bene: se potessi integrare per parti e usare il dato nullo sarebbero gli stessi passaggi che si fanno in una variabile.

Guadagno iniziale di regolarità Essendo $\partial\Omega$ regolare, allora

$$\Delta u = f \text{ con } f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$$

Nel vostro caso banalmente $f(x,y) = -\sin u(x,y) \in L^2(\Omega)$ e quindi $u \in H^2(\Omega)$. Ora che $u \in H^2$, per immersione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$, e quindi u è Hölderiana di ogni ordine, e quindi u si annulla al bordo in senso classico (e non solo come traccia).

Guadagno ulteriore di regolarità Essendo $\partial\Omega$ molto regolare, allora

$$f \in H^k \Rightarrow u \in H^{k+2}$$

Quindi il bootstrap funziona se siamo in grado di garantire che

$$u \in H^k \stackrel{??}{\Rightarrow} f = -\sin u \in H^k$$

L'implicazione però è DELICATA, e tende ad essere vera SOLO IN DIMENSIONE BASSA.

Dov'è il cinghio?

Esaminiamo il passo iniziale. Se $u \in H^2$, possiamo dire che $\sin u \in H^2$?

- Ovviamente $\sin u \in L^2$

- Derivate prime

$$f_x = \cos u \cdot u_x$$

$$f_y = \sin u \cdot u_y$$

$$\int_{\Omega} |f_x|^2 \leq \int_{\Omega} |u_x|^2 < +\infty$$

idem



- Derivate seconde

$$f_{xx} = -\sin u \cdot u_x^2 + \cos u \cdot u_{xx} \quad (\text{le altre sono simili})$$

Ora banalmente

$$\int_{\Omega} (\cos u)^2 \cdot u_{xx}^2 \leq \int_{\Omega} u_{xx}^2 < +\infty$$

Il problema nasce da $\sin u \cdot u_x^2$. Questo sta in L^2 se (non oso dire "e solo se") $u_x^2 \in L^2$, cioè $u_x \in L^4$, e questo in generale non è garantito da $u \in H^2$.

Questo funziona quando H^2 si immerge in $W^{1,4}$, cioè (scendendo di un livello), quando H^1 si immerge in L^4 , cioè $4 \leq 2^* = \frac{2d}{d-2}$, il che è vero se e solo se $d \leq 4$.

Essendo in dimensione 2 le cose vanno bene, dunque $\sin u \in H^2$ e quindi $u \in H^4$.

Da qui tu poi si prosegue per induzione.

Vediamo il passaggio successivo : $u \in H^4 \Rightarrow$ sia $u \in H^4$.

È fastidioso perché richiede le formule per le derivate successive

$$f_{xxx} = -\cos u \cdot u_x^3 - 3\sin u \cdot u_x u_{xx} + \cos u \cdot u_{xxx}$$

$\uparrow$ limitata $\uparrow$ limitata $\uparrow$ L^2 $\uparrow$ L^2

Si tratta di mostrare che, quando calcolo le derivate k -esime di f , vengono fuori solo

- derivate k -esime di u (ok perché sono L^2 per hp)
- derivate $(k-1)$ -esime di u al più al quadrato (ok perché sono L^4 in dimensione $d \leq 4$)
- derivate di ordine inferiore come gli pare (ok perché tanto sono continue).

Alternativa? Supponiamo $u \in H^4$. Allora

$$f_x = \cos u \cdot u_x$$

$$f_{xx} = -\sin u \cdot u_x^2 + \cos u \cdot u_{xx}$$

$\uparrow$ C^2 $\uparrow$ H^2 $\uparrow$ C^2 $\uparrow$ H^2

Tutto sta a verificare che $u_x^2 \in H^2$ se $u \in H^4$, e più in generale $u_x^2 \in H^k$ se $u \in H^{k+2}$

Poniamo $g = u_x^2$. Allora

$$g_x = 2 u_x u_{xx}$$

$\uparrow$ continua, quindi L^∞ $\uparrow$

$$g_{xx} = 2 u_{xx}^2 + 2 u_x u_{xxx}$$

$\uparrow$ continua $\uparrow$ continua $\uparrow$ L^2

Le derivate quarte sono "nascoste" dal conto $C^2 \cdot H^2 = H^2$,
che va controllato a parte (vale in tutte le dimensioni?).

— o — o —