

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 49

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

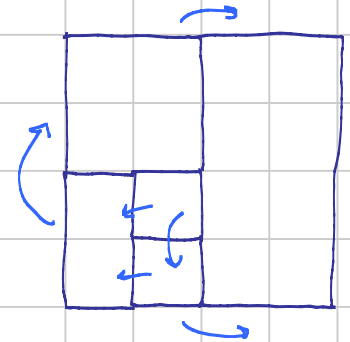
EXTENDER PER INSIEMI DEL PIANO

Ingredienti base: extender in una variabile $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$ e $(0,+\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$ che si fanno (ad esempio) per riflessione.

Esempio 1 Quadrato $(0,1)^2$

Soluzione à la Brezis, facendo varie riflessioni.

Attraverso 4 simmetrie abbiamo esteso a $(-1,3)^2$, che è un quadrato t.c.
 $(0,1)^2 \subset (-1,3)^2$.



A questo punto consideriamo $\varphi \in C_c^\infty((-1,3)^2)$ con $\varphi \equiv 1$ in $(0,1)^2$.
Moltiplicando per questa φ abbiamo finito

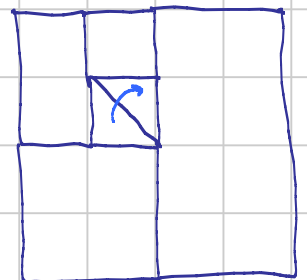
$$u \in W^{1,p}((0,1)^2) \Rightarrow \underbrace{Eu}_{\substack{\uparrow \\ \text{quello costruito con} \\ \text{le riflessioni}}} \in W^{1,p}((-1,3)^2) \Rightarrow \varphi \cdot Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$$

$\uparrow$
quello costruito con
le riflessioni

$\uparrow$
è Sobolev sia nel $\square$ grande
sia fuori da $\text{supp } \varphi$.

Esempio 2 Triangolo qualunque

Se il triangolo è isoscele e rettangolo, allora con una simmetria rispetto all'ipotenusa diventa un quadrato, e poi punto come nell'esempio prec.



Se il triangolo è qualunque, con una AFFINITÀ lo mandiamo in un triangolo isoscele rettangolo, poi estendiamo, poi torniamo.

uno indietro con l'affinità inversa.

Oss. generale La solus. per i quadrati vale anche per i rettangoli. Più in generale, se Ω_1 e Ω_2 vengono mandati l'uno nell'altro da una affinità, allora ogni solus. per Ω_2 diventa una solus. per Ω_1 , e viceversa.

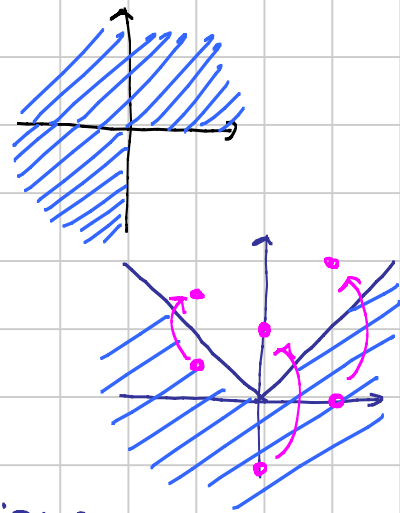
Ancora più in generale, basta che esista $\Phi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ invertibile, di classe C^1 , con $J\Phi$ e $J\Phi^{-1}$ limitati (notare che sono le hp. della formula di cambio di variabili negli integrali multipli).

Esempio 3 Tre quadranti

Questo insieme, a meno di rotazioni, è come se fosse

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|\}$$

↑ funzione Lip.

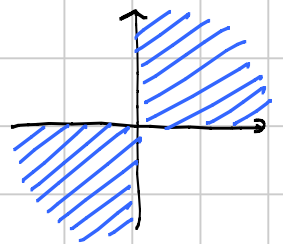


Da questo insieme posso estendere per riflessione

$$[Eu](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y < |x| \\ u(x, 2|x| - y) & \text{se } y > |x| \end{cases}$$

La verifica dovrebbe essere il solito conto.

Esempio 4 1° e 3° quadrante



Come dimostro che un estender NON esiste?

SE un estender esistesse, allora varrebbero i teoremi di immersione. Quindi basta mostrare che i teo. di immersione NON valgono.

In questo caso, vorrebbe dire che le $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > 2$

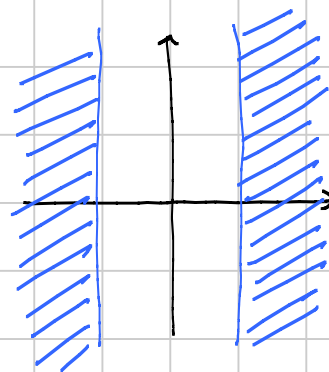
si estendono con continuità alla chiusura, il che è falso per la u che vale 1 nel 1° quadr. e -1 nel 3° quadr.

Oss. Questo mostra non esistono $(1,p)$ estender per $p > 2$.
Per $p \leq 2$ occorrerebbe qualche argomento più fine.

Esempio 5 Due semipiani: $x < -1$ unito $x > 1$

L'estender esiste $((1,p)$ -estender per ogni p) e si costruisce a tappe

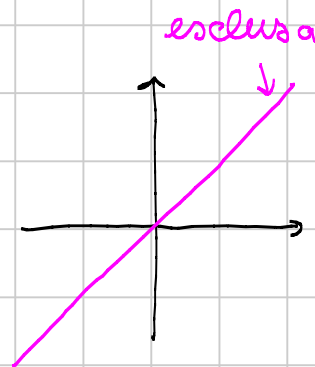
- Estendo da $x < -1$ a $x < 0$ per riflessione
- " " $x > 1$ a $x > 0$ per riflessione
- considero una θ come in figura
→ classe C^∞
→ $\theta(x) \equiv 1$ per $|x| \geq 1$
→ $\theta(x) \equiv 0$ in un intorno di $x=0$
- Moltiplico la u estesa precedentemente per questa θ , dipendente dalla sola x .



Oss. A termine dei primi due passi avevo esteso a $x < 0$ unito $x > 0$, ma nessuno mi assicurava che andasse bene su $\mathbb{R}^2$.

Esempio 6 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$

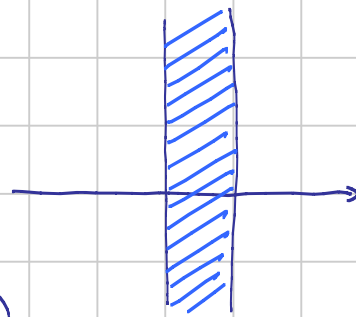
Certamente non esiste $(1,p)$ estender per $p > 2$ per lo stesso motivo dell'esempio 4.



Lo stesso esempio (1 sopra e -1 sotto) non sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ per nessun $p \geq 1$ (esercizio) e quindi non esiste estender nemmeno per $p \leq 2$.

Esempio 7 Striscia $(0,1) \times \mathbb{R}$

- Per riflessione estendiamo a $(-1,2)$
- Moltiplichiamo per cutoff $\theta(x)$
con $\theta \in C_c^\infty((-1,2))$ e $\theta(x) \equiv 1$ in $(0,1)$.



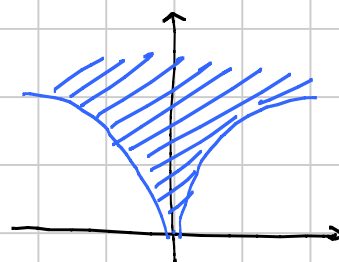
Esempio 8 $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |\sin x|\}$
 $\uparrow$ Lipschitz

$$[Eu](x,y) := \begin{cases} u(x,y) & \text{se } y > |\sin x| \\ u(x, 2|\sin x| - y) & \text{se } y < |\sin x| \end{cases}$$

Solite verifiche!

Esempio 9 $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|^{1/2}\}$

Se dimostriamo che in Ω non valgono le immersioni, allora non esiste un $(1,p)$ estender per ogni $p \geq 1$.



Consideriamo $u(x,y) = \frac{1}{y^\alpha}$. Per quali α questa funzione sta in $W^{1,p}(\Omega)$, almeno "vicino all'origine"?

$$\iint_{\Omega \cap B(0,1)} \frac{1}{y^\alpha} dx dy < +\infty$$

$$(u \in L^p)$$

$$\alpha p < 1 \rightsquigarrow \alpha < \frac{1}{p}$$

$$\iint_{\Omega \cap B(0,1)} \frac{1}{y^{(\alpha-1)p}} dx dy < +\infty$$

$$(u_y \in L^p)$$

$$(\alpha-1)p < 1 \rightsquigarrow \alpha < \frac{1}{p} + 1$$

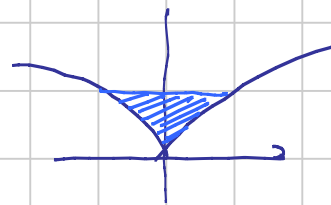
Posso prendere $p=3$ e $\alpha = \frac{1}{4}$. Allora $u \in W^{1,3}(\Omega)$ ma $u \notin L^\infty(\Omega)$, e quindi le immersioni non valgono.

Burocraticamente l'esempio non andrebbe bene perché abbiamo integrato solo in un intorno dell'origine.

In realtà basta considerare $u(x, y) = \frac{1}{y^\alpha} \cdot \varphi(x, y)$
 dove $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\varphi \equiv 1$ in un
 intorno dell'origine. Quindi tutti gli integrali si riducono
 ad un intorno dell'origine.

In realtà le condizioni sono ancora più larghe

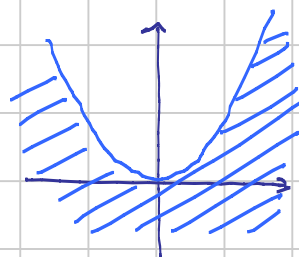
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \cap (-1,1)^2} \frac{1}{y^\alpha p} dx dy &= 2 \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{y^\alpha p} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{y^{\alpha p - 2}} dy \end{aligned}$$



e questo converge $\Leftrightarrow \alpha p - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{p}$

Quindi per ogni $p \geq 1$ esistono funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e che
 non sono limitate.

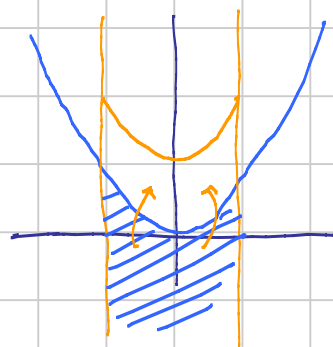
Esempio 10 $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$



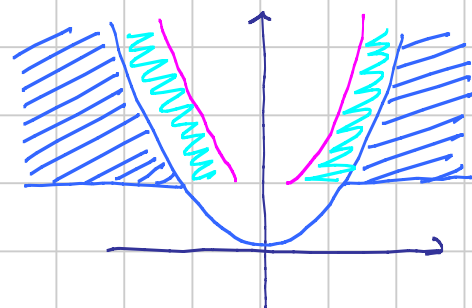
La banale riflessione non funziona perché
 x^2 non è lip. (quindi Ω estender per riflessione
 si comporta male rispetto alle norme).

Però si possono fare 3 costruzioni separate

- una nella zona con $x \in (-1, 1)$
- due nella zona $y > \frac{1}{2}$ $x < 0$
 $y > \frac{1}{2}$ $x > 0$
- Le tre costruzioni si rendono globali
 con una partizione dell'unità



Per esercizio sistemare bene i
 dettagli.



— o — o —