

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 48

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

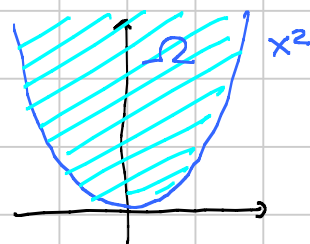
06/10/2020

Esempio $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

Verebbe da definire

$$[Eu](x, y) := \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y > x^2 \\ u(x, 2x^2 - y) & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

$\uparrow$
simmetrico di y wrt x^2



Questa Eu estende u , ma NON rispetta il vincolo sulle norme

$$\|Eu\|_{1,p,\mathbb{R}^2} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

Il problema nasce dalle derivate rispetto ad x . Chi sarebbero?

$$[Eu]_x(x, y) = u_x(x, 2x^2 - y) + u_y(x, 2x^2 - y) \cdot 4x \quad \text{se } y < x^2$$

$\uparrow \uparrow$
NON LIMITATO

Qui non è difficile trovare esempi che violino la disuguaglianza.

Basta prendere $\varphi \in C_c^\infty((-1, 1)^2)$ e poi porre

$$u_n(x, y) = \varphi(x - n, y - n^4) = \text{stessa funzione centrata nel punto } (n, n^4)$$

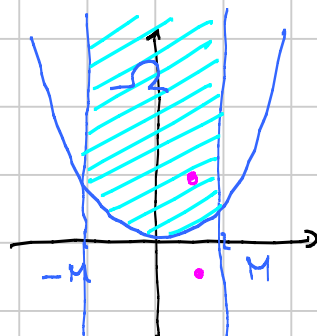
Allora $[Eu_n]_y(x, y)$ è molto grande nella parte negativa per colpa del termine $4x$ che è dell'ordine di n , quindi $\|[Eu_n]_x\|$ è dell'ordine di n , mentre $\|u_n\|_{1,p,\Omega}$ è costantemente uguale a $\|\varphi\|_{1,p,\mathbb{R}^2}$.

Domanda: esiste un ε -extender da Ω in $\mathbb{R}^2$ con controllo delle norme?

Risposta: Sì! Ma la costruzione non è ovvia

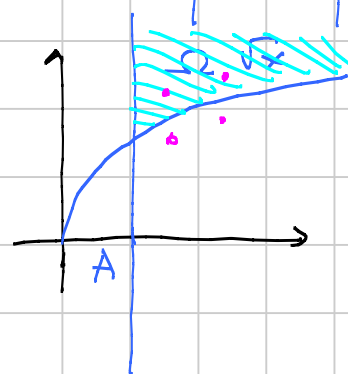
Fatto 1 Fissato $M > 0$ reale, esiste un ε -estensor da $\Omega_M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < M, y > x^2 \}$ alla striscia $S_M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < M \}$

Funziona la formula di prima perché x^2 è Lip. per $x \in (-M, M)$.



Fatto 2 Fissato $A > 0$ reale, esiste un ε -estensor da

$$\begin{aligned} &\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A, y > \sqrt{x} \} \text{ a} \\ &\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A \} \end{aligned}$$



Anche in questo caso funziona la riflessione, poiché $\sqrt{x}$ è Lip. per $x > A$.

Oss. La costruzione funziona anche nella direzione opposta, cioè da $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A, y < \sqrt{x} \}$ a $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A \}$.

Fatto 3 L'insieme Ω originario lo posso ricoprire con 3 aperti $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ del tipo appena descritto, ad esempio

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2, y > x^2 \} \\ \Omega_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1, -1 < x < \sqrt{y} \} \\ \Omega_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1, -\sqrt{y} < x < 1 \} \end{aligned}$$



Da ciascuno di questi tre insiemi sappiamo estendere a tutto $\mathbb{R}^2$, usando costruzioni precedenti

Fatto 4 Ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si scrive come $u_1 + u_2 + u_3$ con $u_i \in W^{1,p}(\Omega_i)$.

Per far questo basta trovare una partizione dell'unità, cioè 3 funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 con $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ e

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$$

[La dimostrazione è quella del tipo B.]

• Poniamo $\hat{\Omega}_1 = \{|x| < 2\}$, $\hat{\Omega}_2 = \{x > -1, y > 1\}$, $\hat{\Omega}_3 = \{x < 1, y > -1\}$

• Risparmiando: $\hat{\hat{\Omega}}_1 = \{|x| < 1,9\}$, $\hat{\hat{\Omega}}_2 = \{x > -0,9, y > 0,9\}$, $\hat{\hat{\Omega}}_3 = \dots$

• Cerchiamo θ_i a supp. cpt. in $\hat{\Omega}_i$ e identicamente 1 in $\hat{\hat{\Omega}}_i$

• Poniamo

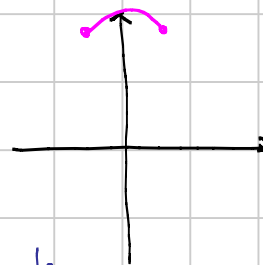
$$\begin{aligned} \psi_1 &= \theta_1 \\ \psi_2 &= \theta_2(1 - \theta_1) \\ \psi_3 &= \theta_3(1 - \theta_1)(1 - \theta_2) \end{aligned} \quad]$$

Infine poniamo $u_i = u \cdot \psi_i$.

Estendo le u_i e poi sommo le estese.

Esempio 2 Estensione dai quadranti

(a) 1-estender da $(0, \infty)^2$ a $\mathbb{R}^2$



• Per riflessione wrt asse y estendo al 2° quadrante

• " " " " x estendo al 3° e 4° quadrante

Non è difficile intuire che

$$[Eu](x, y) = u(|x|, |y|)$$

Posso anche fare cose più creative, usando 1-estender diversi da $(0, \infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$. Una possibilità potrebbe essere

$$[Eu](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & x > 0, y > 0 \\ u(-2x, y) & x < 0, y > 0 \\ u(x, -3y) & x > 0, y < 0 \\ u(-2x, -3y) & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} u(x, y) \\ u(-2x, y) \\ u(x, -3y) \\ u(-2x, -3y) \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{provare per} \\ \text{credere!} \end{array}$$

(b) 2- extender da $(0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- Estendo al 2° quadrante in uno dei modi che funzionavano da $(0, +\infty)$ ad $\mathbb{R}$, ad esempio

$$[E_1 u](x, y) = 3u(-x, y) - 2u(-2x, y) \quad \text{se } x < 0, y > 0$$

- Estendo al 3° e 4° quadrante allo stesso modo, o anche in un modo diverso.

$$[E u](x, y) = 3E_1(x, -y) - 2E_1(x, -2y) \quad \text{se } y < 0$$

Esempio 3 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$

(a) Voglio trovare 1- extender da Ω ad $\mathbb{R}^2$.

Dovrebbe funzionare la solita formula

$$[E u](x, y) := \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y > |x| \\ u(x, 2|x| - y) & \text{se } y \leq |x| \end{cases}$$

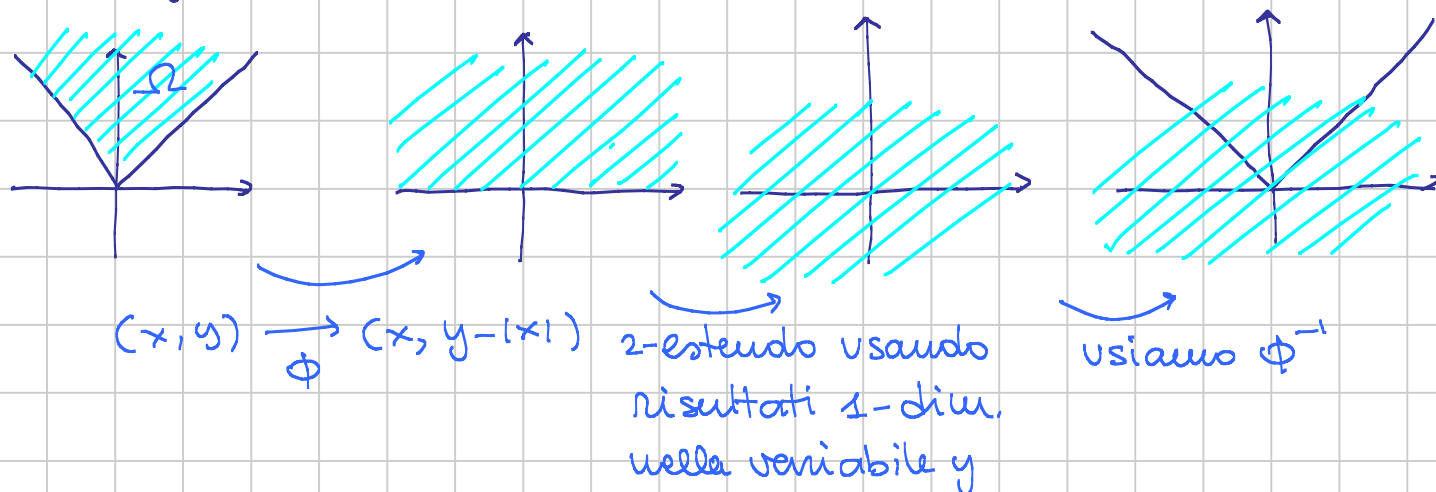
Funziona perché $|x|$ è Lipschitziana.

Questo non è un 2- extender, sostanzialmente per lo stesso motivo per cui $[E u](x) = u(|x|)$ non lo era da $(0, +\infty)$ ad $\mathbb{R}$ (se prendo $u(x, y) \in C^1$ fino al bordo, la sua estesa ha la derivata u_y che non è continua nei punti del bordo: basta pensare a $u(x, y) = y$, opportunamente modificata fuori da una palla gigante per renderla $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$).

(b) Come posso costruire un 2- extender da Ω in $\mathbb{R}^2$.

Se provo ad usare formule simili a quelle di 1 variabile, mi ritrovo dei valori assoluti $|x|$ ovunque, e questi comportano le derivate seconde wrt x (provaci e accorgersene).

Quindi la strategia basata sulla riduzione al semipiano non funziona

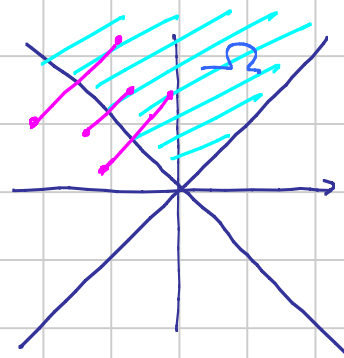


Il problema è che ϕ è "quasi C^1 ", ma per nulla C^2 .

Come ne usciamo! Ruotando la testa di 45° !!!

Basta osservare che il nuovo Ω è come fosse il 1° quadrante!!

- Estendo prima a $y > x$ (come avremmo fatto in una variabile)
- Estendo a tutto $\mathbb{R}^2$



Visione alternativa:

- ruoto Ω fino ad ottenere il 1° quadrante
- 2-estendo come negli esempi precedenti
- ruoto indietro.

— o — o —