

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 47

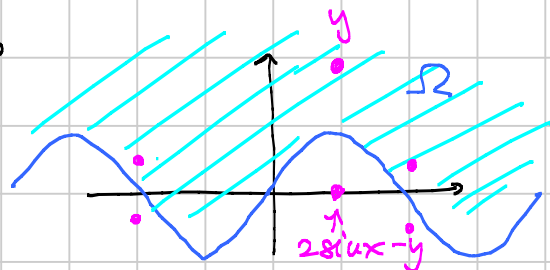
Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio (Extender in $\mathbb{R}^2$) Consideriamo

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sin x\}$$



Trovare un $\pm$ -extender $\Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$. Un naturale candidato è

$$[Eu](x, y) = u(x, |y - \sin x| + \sin x) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y > \sin x \\ u(x, 2\sin x - y) & \text{se } y < \sin x \end{cases}$$

Per dimostrare che si tratta di $\pm$ ext.

devo fare due verifiche

simmetrico di y wrt a $\sin x$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} Eu(x, y) \varphi_x(x, y) dx dy = - \iint_{\mathbb{R}^2} (Eu)_x(x, y) \varphi(x, y) dx dy$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} Eu(x, y) \varphi_y(x, y) dx dy = - \iint_{\mathbb{R}^2} [Eu]_y(x, y) \varphi_y(x, y) dx dy$$

Iniziamo dalla seconda, cercando di ridurre LHS e RHS a Ω .

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \iint_{\Omega} \dots + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} dy u(x, \underbrace{2\sin x - y}_z) \varphi_y(x, y) \\ &= \iint_{\Omega} \dots + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\sin x}^{+\infty} dz u(x, z) \varphi_y(2\sin x - z) \\ &= \iint_{\Omega} u(x, y) \underbrace{\{ \varphi_y(x, y) + \varphi_y(2\sin x - y) \}}_{\varphi_y(x, y)} dx dy \end{aligned}$$

Ora

$$[Eu]_y(x, y) = \begin{cases} u_y(x, y) & y > \sin x \\ -u_y(x, 2\sin x - y) & y < \sin x \end{cases}$$

$$\text{RHS} = \iint_{\Omega} u_y \varphi dx dy + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} -u_y(x, \sin x - y) \varphi(x, y) dy$$

$$= \iint_{\Omega} u_y(x, y) \underbrace{\{\varphi(x, y) - \varphi(x, \sin x - y)\}}_{\psi(x, y)} dx dy$$

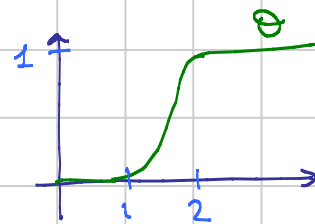
Quindi la tesi equivale a $\iint_{\Omega} u \psi_y = - \iint_{\Omega} u_y \psi$

Sarebbe ovvio se $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, ma non lo è. Tuttavia $\psi(x, y) = 0$ se $(x, y) \in \partial\Omega$, cioè se $y = \sin x$ (verifica) e questo dovrebbe salvarci.

Formalmente, usiamo la solita Θ , e poniamo

$$\psi_m(x, y) := \psi(x, y) \cdot \Theta(m(y - \sin x))$$

↑
misura quanto
(x, y) è dentro Ω (distanza
verticale da $\partial\Omega$)



Ad m fissato vale $\iint_{\Omega} u \psi_{my} = - \iint_{\Omega} u_y \psi_m$

Ora RMS $\rightarrow - \iint_{\Omega} u_y \psi$ per puntuale dominata. Al RHS abbiamo 2 termini

$$\iint_{\Omega} u(x, y) \psi_y(x, y) \Theta(m(y - \sin x)) dx dy \xrightarrow{\text{solito motivo}} \iint_{\Omega} u \psi_y$$

Vedremo che l'altro termine andante a 0:

$$\iint_{\Omega} |u(x, y)| \cdot \underbrace{|\psi(x, y)|}_{\leq L - \frac{2}{m}} \cdot \underbrace{m |\Theta'(m(y - \sin x))|}_{\text{limitato}} dx dy \rightarrow 0$$

↑
in realtà sto integrando su

↑
puntuale dominata

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \sin x + \frac{1}{m} \leq y \leq \sin x + \frac{2}{m}\}$$

$$|\psi(x, y)| = |\psi(x, y) - \psi(x, \sin x)| \leq L |y - \sin x| \leq L - \frac{2}{m}$$

↑
 $(x, \sin x) \in \partial\Omega$ ψ è lip ↑
nell'insieme
in cui si integra

La derivata rispetto a x è più delicata. Ci aspettiamo

$$[Eu]_x(x, y) := \begin{cases} u_x(x, y) & \text{se } y > \sin x \\ u_x(x, 2\sin x - y) + u_y(x, 2\sin x - y) \cdot 2\cos x & \text{se } y < \sin x \end{cases}$$

$$\text{LHS} = \iint_{\Omega} u \varphi_x + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} u(x, 2\sin x - y) \varphi_x(x, y) dy$$

$$= \iint_{\Omega} u(x, y) \{ \varphi_x(x, y) + \varphi_x(x, 2\sin x - y) \} dx dy$$

$$\begin{aligned} -\text{RHS} &= \iint_{\Omega} u_x \varphi + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} u_x(x, 2\sin x - y) \varphi(x, y) dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} u_y(x, 2\sin x - y) \cdot 2\cos x \varphi(x, y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Omega} u_x(x, y) \{ \varphi(x, y) + \varphi(x, 2\sin x - y) \} dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} u_y(x, y) 2\cos x \varphi(x, 2\sin x - y) dx dy \end{aligned}$$

Parentesi Dalla definizione di derivate deboli, segue una specie di formula di Gauss-Green del tipo

$$\iint_{\Omega} u \underbrace{(A_x + B_y)}_{\text{div } \vec{E}} dx dy = - \iint_{\Omega} \underbrace{(u_x A + u_y B)}_{\langle \nabla u, \vec{E} \rangle} dx dy \quad \vec{E} := (A, B)$$

per ogni $A \in C_c^\infty(\Omega)$ e $B \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ponendo $A := \varphi(x, y) + \varphi(x, 2\sin x - y)$

$B := 2\cos x \cdot \varphi(x, 2\sin x - y)$

se potessimo usare la formula si sopra verrebbe

$$-\text{RHS} = \iint_{\Omega} u_x A + u_y B = \iint_{\Omega} u (A_x + B_y) = \text{LHS}$$

perché $A_x + B_y = \varphi_x(x, y) + \varphi_x(x, 2\sin x - y) + \varphi_y(x, 2\sin x - y) \cdot 2\cos x - 2\cos x \varphi_y(x, 2\sin x - y)$

Tutto sta a dimostrare che posso usare GG anche se A e B non sono $C_c^\infty(\Omega)$.

Parentesi brutale Tenendo conto del bordo, GG diventa

$$\iint_{\Omega} u (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} u \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} (u_x A + u_y B) dx dy$$

$\uparrow$
normale esterna

quindi abbiamo speranza che la formula che ci serve sia vera se $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ su $\partial\Omega$.

Ora $\partial\Omega = \{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\}$, quindi il tangente è $(1, \cos x)$ e ruotando di 90° in senso orario (guarda la figura!) ottengo $\vec{n} = (\cos x, -1)$. Ora

$$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = A \cdot \cos x - B = \{\varphi(x, y) + \varphi(x, 2\sin x - y)\} \cdot \cos x - 2\cos x \varphi(x, 2\sin x - y)$$

Mettendo $y = \sin x$ viene $= 0$, che è un buon segno!!

Per rendere il discorso rigoroso, sostituiamo A e B con

$$A_n := A(x, y) \cdot \Theta(n(y - \sin x))$$

$$B_n := B(x, y) \cdot \Theta(n(y - \sin x))$$

Ad n fisso vale GG

$$\iint_{\Omega} u (A_n x + B_n y) dx dy = - \iint_{\Omega} (u_x A_n + u_y B_n) dx dy$$

Al RHS abbiamo convergenza puntuale dominata a quello che vogliamo. Al LHS abbiamo 2 tipi di termini:

$$\iint_{\Omega} u (A_x + B_y) \Theta(n(y - \sin x)) dx dy \rightarrow \iint_{\Omega} u (A_x + B_y) dx dy$$

e poi ci sono i termini in cui ho derivato Θ , e precisamente

$$\iint_{\Omega} u(x,y) \{ A(x,y) \sin \Theta (n(y - \sin x)) (-\cos x) + B(x,y) \sin \Theta (-\dots) \} dx dy$$

$$= \iint_{\Omega} u(x,y) \{ \underbrace{-A(x,y) \cos x + B(x,y)}_{D(x,y) \leq L |y - \sin x|} \underbrace{\sin \Theta (n(y - \sin x))}_{\leq \text{costante}} \} dx dy$$

↑
in realtà è
molto meno,
come sempre

$$\leq L \frac{2}{n} \text{ dove si integra}$$

Il punto fondamentale è che $D(x,y)$ si annulla su $\partial\Omega$ ed è Lipschitz, quindi al solito

$$|D(x,y)| = |D(x,y) - D(x, \sin x)| \leq L |y - \sin x|$$

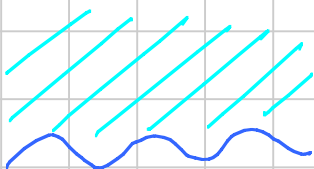
Quindi alla fine i termini con Θ tendono a 0.

Per avere davvero un 1-estender, resta da verificare che

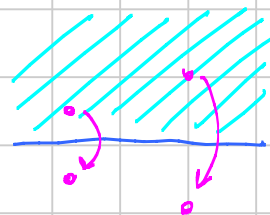
$$\|Eu\|_{1,p,\mathbb{R}^2} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

Questo si dimostra facendo esplicitamente i conti, ma il punto essenziale è che $\sin x$ è Lipschitziana, quindi anche nel termine peggiore, $[Eu]_x$, ho moltiplicato per cose limitate.

Qual è l'idea di questa costruzione?



↗



← qui estendo per
y-riflessione

riflessione

Alla fine torno indietro $\Omega \rightsquigarrow \{y > 0\} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$
 ↑ $(x,y) \rightarrow (x, y - \sin x)$ ↑
 ritorno indietro con l'inverso di