

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 46

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 Determinare a e b in modo che

$$[Eu](x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x > 0 \\ a u(-5x) + b u(-2020x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sia un 2-estender

Brutal mode: le funzioni C^1 fino al bordo devono estendersi bene

$$\underbrace{u(0)}_{\text{sopra}} = \underbrace{a u(0) + b u(0)}_{\text{sotto}}$$

$$a + b = 1$$

Inoltre $(Eu)'(x) = -5a u(-5x) - 2020b u(-2020x)$ per $x < 0$
da cui

$$u'(0) = -5a u'(0) - 2020b u'(0)$$

$$-5a - 2020b = 1$$

Abbiamo ottenuto un sistema lineare che ha soluz. (a, b) unica, e questi dovrebbero essere i valori buoni

Altri valori non vanno bene

Il conto sopra rappresenta una cond. necessaria (l'estesa deve avere derivate prime e seconde cont.)

Questi valori vanno bene

Ha fatto con i cambi di variabile come nell'ultimo esempio della sez. prec. (deve venire $\psi(0) = \psi'(0) = 0$)

Oss. Se la definizione per $x < 0$ fosse stata $a u(-x) + b u(-2x)$, il sistema veniva

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a - 2b = 1 \end{cases} \rightsquigarrow b = -2 \text{ e } a = 3$$

(come nell'esempio precedente :))

Esempio 2 Come sopra con

$$[Eu](x) = a u(1|x) + b u(4|x + cx) \quad x < 0.$$

Vogliamo che sia un 2- extender.

Intanto deve coincidere per $x > 0$

$$a u(x) + b u(4x + cx) = u(x) \quad \text{per ogni } u$$

da cui $c = -3$ e $a + b = 1$. A questo punto

$$[Eu](x) = a u(-x) + b u(-7x) \quad \forall x < 0$$

e si procede come nell'esempio precedente

Esempio 3 Cerchiamo un 3- extender con

$$u(x) = a u(-x) + b u(-2x) + c u(-3x) \quad \text{per } x < 0$$

Le condizioni necessarie sono il riincollamento di $u(0)$, $u'(0)$ e $u''(0)$.

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a - 2b - 3c = 1 \\ a + 4b + 9c = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{soluzione unica} \\ \text{(sistemi alla VANDERMONDE)} \end{array}$$

Questa è la cond. necessaria.

Per la sufficiente, serve il solito cambio di variabili (farlo ancora una volta per esercizio, e su tutte e 3 le derivate!).

Esempio 4 Costruzione di extender classici.

$$(a) \quad (0, 1) \rightsquigarrow (-1, 1) \quad 1\text{-extender} \quad [Eu](x) = u(1|x)$$

$$(b) \quad (0, 1) \rightsquigarrow \mathbb{R} \quad 1\text{-extender}$$

Procediamo a tappe

Step 1 $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$ per riflessione $[E_1 u](x) = u(|x|)$

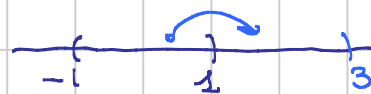


Step 2 $(-1,1) \rightsquigarrow (-1,3)$ per riflessione in $x=1$

$$[E_2 u](x) = u(2-x) \text{ se } x \in (1,3)$$

↑

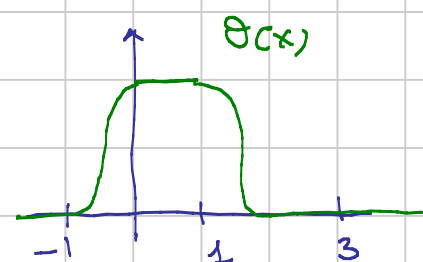
x e $2-x$ sono simmetrici
rispetto a 1 (la loro
media è 1)



Step 3 Grazie agli step 1 e 2 abbiamo esteso u ad una
funzione in $(-1,3)$. Nota che $(0,1) \subset (-1,3)$.
Ora scegliamo θ come in figura.

Le cose essenziali sono

- $\theta \in C_c^\infty((-1,3))$
- $\theta(x) = 1$ per ogni $x \in (0,1)$.



Allora basta moltiplicare per θ l'estensione che avevamo
al termine dello step 2. Osserviamo che

$$u \in W^{1,p}((0,1)) \Rightarrow E_2 u \in W^{1,p}((-1,3)) \Rightarrow E_3 u = E_2 u \cdot \theta \in W^{1,p}(\mathbb{R})$$

↑
solita
riflessione
↑
smooth. Sobolev
= Sobolev

Alternativa: potevamo direttamente estendere u a $(-1,2)$
ponendo

$$[E_2 u](x) = \begin{cases} u(-x) & \text{se } x \in (-1,0) \\ u(x) & \text{se } x \in (0,1) \\ u(2-x) & \text{se } x \in (1,2) \end{cases}$$

A questo punto si può moltiplicare per θ come prima.

(c) $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$ 3 estender.

devono stare in $(0,1)$

Lo cerchiamo del tipo $[E u](x) = a u(-\frac{x}{2}) + b u(-\frac{x}{3}) + c u(-\frac{x}{7})$
per $x \in (-1,0)$

Come negli esempi precedenti troviamo a, b, c.

Oss. La cosa importante è aver fatto comb. lineari di $u(-\alpha x)$, $u(-\beta x)$, $u(-\gamma x)$ con α, β, γ in $(0, 1)$

$$(d) \quad (-1, 0) \cup (0, 1) \rightsquigarrow (-2, 0) \cup (0, 2) \quad 2\text{-extender}$$

Basta fare separatamente dei 2-extender $(-1, 0) \rightsquigarrow (-2, 0)$
 $(0, 1) \rightsquigarrow (0, 2)$

Questi si fanno semplicemente come nel caso $(0, 1) \rightsquigarrow (-1, 1)$ semplicemente "traslando le costruzioni".



Oss. Non è possibile fare 1-extender $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightsquigarrow \mathbb{R}$
 $\rightsquigarrow (-2, 2)$

perché non posso estendere una $u(x)$ che vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$.

$$(e) \quad (-2, -1) \cup (1, 2) \rightsquigarrow (-2, 2) \\ \rightsquigarrow \mathbb{R}$$



Step 1 Con i soliti procedimenti estendo $(-2, -1) \rightsquigarrow (-2, 0)$
 $(1, 2) \rightsquigarrow (0, 2)$

Così non abbiamo finito, perché l'estesa funziona bene in

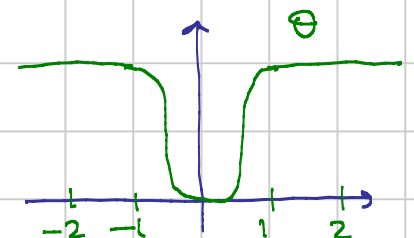
$$(-2, 0) \cup (0, 2)$$

ma da qui non si estende a $(-2, 2)$!!! (Pensare al caso di $u(x) = -1$ in $(-2, -1)$ e $u(x) = 1$ in $(1, 2)$).



Step 2 Pensiamo θ come in figura.

Le proprietà essenziali sono



$$(i) \theta \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$(ii) \theta(x) = 1 \text{ se } |x| \geq 1$$

$$(iii) \theta(x) = 0 \text{ in un intorno di } x=0$$

$$\text{Possiamo ora } [Eu](x) = [E_1 u](x) \cdot \theta(x)$$

↑ extender a fine step 1

Grazie a (ii) sappiamo che $[Eu](x) = u(x)$ per $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

Inoltre $[Eu](x)$ si annulla in un intorno di $x=0$ per (iii)

ed è un extender in $(-2, 0) \cup (0, 2)$, ma allora lo è in $(-2, 2)$

(tutte le integrazioni per parti che coinvolgono u con una φ che ha supporto compatto in $(-2, 2)$ in realtà avvengono solo su un insieme ben contenuto in $(-2, 0) \cup (0, 2)$)

$$\int_{-2}^2 [Eu](x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_{-2}^2 [Eu]'(x) \varphi(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 [E_1 u](x) \theta(x) \dot{\varphi}(x) dx &= - \int_{-2}^2 [E_1 u](x) \dot{\theta}(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_{-2}^2 [E_1 u]'(x) \theta(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza diventa

$$\int_{-2}^2 [E_1 u] \underbrace{\{\theta \dot{\varphi} + \dot{\theta} \varphi\}}_{\psi} dx = - \int_{-2}^2 [E_1 u]' \underbrace{\theta \varphi}_{\varphi} dx$$

e gli integrali sono in realtà sul supporto di ψ , che è ben contenuto in $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Variante consigliata : come sopra, ma $(-3, -1) \cup (1, 3) \rightsquigarrow (-3, 3)$