

# Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 45

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

EXTENDER

SLOGAN: i casi da capire sono  $(0,1) \rightarrow (-1,1)$   
 $(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Esempio 0 (riscaldamento)  $\pm$ -extender  $(0,+\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$

Dato  $u: (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  consideriamo  $Eu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$[Eu](x) = u(|x|) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x > 0 \\ u(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Claim:  $E$  è un  $\pm$ -extender e ovviamente

$$[Eu]'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} u'(x) \\ -u'(-x) \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{se } u \text{ esiste in} \\ \text{qualche senso} \\ \text{debole} \end{array}$$

Dim Devo dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} Eu(x) \cdot \dot{\varphi}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} [Eu]'(x) \cdot \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Riscrivo LHS e RHS usando solo  $(0,+\infty)$ :

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{-\infty}^0 u(-x) \dot{\varphi}(x) dx + \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\varphi}(x) dx = \int_0^{+\infty} u(x) (\dot{\varphi}(x) + \dot{\varphi}(-x)) dx \\ &\quad \parallel \\ &= \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\varphi}(-x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= - \int_{-\infty}^0 (-u'(-x)) \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 u'(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} u'(x) (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx \end{aligned}$$

convincersi dei segni!

$$\text{LHS} = \text{RHS} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\psi}(x) dx = - \int_0^{+\infty} u'(x) \psi(x) dx$$

dove  $\psi(x) := \varphi(x) - \varphi(-x)$

L'uguaglianza di sopra sarebbe banale se  $\psi \in C_c^\infty((0, +\infty))$ , ma in generale non sarà vero.

Brutal mode: se possiamo ad Analisi 1 (tutto regolare), allora

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u(x) \psi'(x) dx &= \int_0^M u(x) \psi'(x) dx \\ &= [u(x) \psi(x)]_0^M - \int_0^M u'(x) \psi(x) dx \\ &= u(M) \psi(M) - u(0) \psi(0) - \int_0^M u'(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

Varrebbe la formula che vogliamo se fosse  $\psi(0) = 0$ , cosa che nel nostro caso è vera.

Idea: la formula di integrazione per parti che vorremmo vale anche se  $\psi(0) = 0$ .

Il discorso si sistema con la solita  $\theta$  come in figura. Poniamo

$$\psi_m(x) := \psi(x) \theta(mx)$$

e osserviamo che  $\psi_m \in C_c^\infty((0, +\infty))$  (ci siamo staccati da 0)

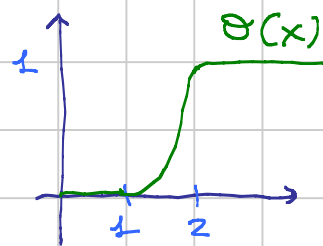
Allora per defn. di  $u'$  che è derivata debole:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} u(x) \psi_m'(x) dx &= - \int_0^{\infty} u'(x) \psi_m(x) dx \\ \int_0^{\infty} u(x) \psi'(x) \theta(mx) dx &= - \int_0^{\infty} u'(x) \psi(x) \cdot \theta(mx) dx \\ + \int_0^{\infty} u(x) \psi(x) m \theta'(mx) dx &= - \int_0^{\infty} u'(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

puntuale dominata

Al LHS abbiamo 2 termini

$$\int_0^{\infty} u(x) \psi'(x) \theta(mx) dx \rightarrow \int_0^{\infty} u(x) \psi'(x) dx \quad \text{puntuale dominata}$$



Per il 2° termine osserviamo che  $\psi$  è lip. in  $\mathbb{R}$  e si annulla in 0, quindi

$$\int_0^{+\infty} |u(x)| \cdot \underbrace{|\psi(x)|}_{\leq Lx} \underbrace{|\dot{\sigma}(nx)|}_{\leq \text{cost.}} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} |u(x)| \cdot \underbrace{Lx}_{\leq \frac{2}{n}} \cdot \text{cost.} dx$$

$$\leq \text{cost} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} |u(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{puntuale dominata}$$

Oss. Quali ipotesi abbiamo usato su  $u$  e  $\dot{\sigma}$ ?  
Soltanto che stiamo in  $L^1((0, M))$  per ogni  $M > 0$   
(è servita per avere le dominazioni)

Esempio 1 Sempre  $u: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Poniamo

$$[Eu](x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x > 0 \\ 3u(-x) - 2u(-2x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Claim: si tratta di un 2-extender, le cui derivate prima e seconda sono quelle che uno si aspetta, ad esempio

$$[Eu]''(x) := \begin{cases} \ddot{u}(x) & \text{se } x > 0 \\ 3\ddot{u}(-x) - 8\ddot{u}(-2x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Brutal mode: perché moralmente funziona? Supponiamo che  $u$  sia di classe  $C^1$  fino al bordo. Accade che  $Eu$  è di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}$ ? (per essere  $W^{2,p}$  non servono derivate seconde continue, ma quelle prime sì, e bene le funzioni!)

Le due espressioni di  $u$  (quella per  $x > 0$  e  $x < 0$ ) coincidono se  $x = 0$  ( $u(0) = 3u(0) - 2u(0)$  :)). Idem per le derivate  
 $\dot{u}(x) = -3\dot{u}(-x) + 4\dot{u}(-2x)$  per  $x < 0$  e quindi  
 $\dot{u}(0) = -3\dot{u}(0) + 4\dot{u}(0)$  :)

Passiamo ora alla verifica formale. Devo verificare che

$$\int_{\mathbb{R}} Eu(x) \ddot{\varphi}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} [Eu]'(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} Eu(x) \ddot{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (Eu)''(x) \varphi(x) dx$$

La prima è analoga all'esempio precedente (esercizio da fare!).

Per la seconda riscrivo LHS e RHS.

$$\text{LHS} = \int_{-\infty}^0 (3u(-x) - 2u(-2x)) \ddot{\varphi}(x) dx + \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\varphi}(x) dx$$

Nel primo integrale cambio variabili

$$\int_{-\infty}^0 3u(-x) \ddot{\varphi}(x) dx = \int_0^{+\infty} 3u(y) \ddot{\varphi}(-y) dy$$

$\uparrow$   
 $y = -x$

$$\int_{-\infty}^0 -2u(-2x) \ddot{\varphi}(x) dx = \int_0^{+\infty} -u(y) \ddot{\varphi}\left(-\frac{1}{2}y\right) dy$$

$y = -2x$

Riassumendo

$$\text{LHS} = \int_0^{+\infty} u(x) \underbrace{\left\{ \ddot{\varphi}(x) + 3\ddot{\varphi}(-x) - \ddot{\varphi}\left(-\frac{x}{2}\right) \right\}}_{\ddot{\psi}(x)} dx$$

$$\text{RHS} = \int_{-\infty}^0 (3\ddot{u}(-x) - 8\ddot{u}(-2x)) \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \ddot{u}(x) \varphi(x) dx$$

Come prima

$$\int_{-\infty}^0 3\ddot{u}(-x) \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} 3\ddot{u}(y) \varphi(-y) dy$$

$$\int_{-\infty}^0 -8\ddot{u}(-2x) \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} -4\ddot{u}(y) \varphi\left(-\frac{y}{2}\right) dy, \text{ da cui}$$

$$\text{RHS} = \int_0^{+\infty} \ddot{u}(x) \underbrace{\left\{ \varphi(x) + 3\varphi(-x) - 4\varphi\left(-\frac{x}{2}\right) \right\}}_{\psi(x)} dx$$

Quello che accade (e che doveva accadere) è che la tesi si è ridotta a

$$\int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}(x) dx = \int_0^{+\infty} \ddot{u}(x) \psi(x) dx$$

Ancora una volta sarebbe banale se  $\psi \in C_c^\infty((0, +\infty))$ , ma non lo è.

Ci aspettiamo quindi dei termini di bordo che coinvolgano  $\psi(0)$  e  $\dot{\psi}(0)$ . Ma "fortunatamente" deve accadere che si annullano. Infatti  $\psi(0) = 0$  e

$$\dot{\psi}(x) = \ddot{\varphi}(x) - 3\ddot{\varphi}(-x) + 2\ddot{\varphi}\left(-\frac{x}{2}\right) \text{ da cui } \dot{\psi}(0) = 0$$

Rigorosamente si sistema tutto prendendo  $\psi_n(x) := \psi(x)\theta(nx)$ . I problemi sono al LHS dove troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}(x) \theta(nx) dx \rightarrow \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\psi}(x) dx \\ &\quad + 2 \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\psi}(x) n \dot{\theta}(nx) dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} u(x) \psi(x) n^2 \ddot{\theta}(nx) dx \end{aligned}$$

Il secondo e terzo termine devono tendere a 0, e lo fanno perché gli integrali sono solo in  $[1/n, 2/n]$  e inoltre

$$\begin{array}{ccc} |\dot{\psi}(x)| \leq Lx & \text{e} & |\psi(x)| \leq Mx^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Lip} + \dot{\psi}(0) = 0 & & \text{Taylor Lagrange con} \\ & & \psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0 \end{array}$$

$$\psi(x) = \psi(0) + \dot{\psi}(0)x + \frac{1}{2} \underbrace{\ddot{\psi}(c)}_{\text{limitata}} x^2$$

Quindi passando al limite abbiamo la tesi!