

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 44

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

TRACCE DI FUNZIONI DI SOBOLEV

(Vedi IstAM 2019/20 - L37)

Problema : data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, vogliamo definire $u|_{\partial\Omega}$ o più in generale $u|_K$ con $K \subseteq \Omega$ sottoinsieme "d-1 dimensionale".

Stiamo quindi cercando $\text{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \text{Spazio}(\partial\Omega)$ con le seguenti proprietà

- Lineare
- sulle funzioni $\in C^0(\text{clos}(\Omega))$ è la restrizione
- Stima del tipo

$$\|\text{Tr } u\|_{\text{Spazio}(\partial\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

- Formula di integrazione per parti
- Se $u_n \rightarrow u$ in qualche senso in Ω , allora $\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u$ in $\text{Spazio}(\partial\Omega)$.

Osservazioni

SLOGAN: le tracce non sono continue se $p=1$

- ① $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ la risposta è banale se $p > 1$ (in tal caso le $W^{1,p}$ sono Hölder e i valori puntuali sono definiti fino al bordo)
- ② $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto regolare e $p > d$ (ancora una volta le $W^{1,p}$ sono Hölder fino al bordo). Question: serve il bordo regolare?
- ③ Se $u \in L^p(\Omega)$ e basta, allora non è possibile definire la traccia (meno banale di quanto sembra)

CASO MODELLO IMPORTANTE

$$d \geq 2, \quad p < d, \quad \Omega = \mathbb{R}_+^d$$

semispazio

$$\mathbb{R}_+^d := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y > 0 \}$$

Proposizione Per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valgono le seguenti stime

$$\textcircled{1} \quad \|u(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(\varphi) \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d}$$

IMPURA, con
RHS solo in $\mathbb{R}_+^d$

- u è definita su tutto $\mathbb{R}^d$
- il LHS ha norma in $\mathbb{R}^{d-1}$ (il bordo)
- il RHS ha norma in $\mathbb{R}_+^d$

$$(2) \quad \|u(x, 0)\|_{\dot{L}^{p^*}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

PURA
RHS su tutto $\mathbb{R}^d$

done

$$\hat{p}_* := \frac{p(d-1)}{d-p} \propto \text{dim. del bordo}$$

$$(\hat{p}_k > p \text{ se } p > 1)$$

③ Per ogni $q \in [\varphi, \hat{p}_*]$ vale

$$\|u(x, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(\varphi, d, q) \|u\|_{d, p, \mathbb{R}^d}$$

IMPURA

Dim Step 1 Come per le immersioni, partiamo con $p=1$

$$u(x,0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) dy \quad \begin{array}{l} \text{(non sarebbe } \infty, \text{ ma in } R \\ \text{abbastanza grande)} \end{array}$$

$$|u(x, y)| \leq \int_0^y \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, s) \right| ds$$

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x,0)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} dy \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \right|$$

polo mettere su
sola $\frac{\partial u}{\partial y}$
↑

$$\approx \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} dy |\nabla u(x,y)| = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)}$$

Step 2 Conquisto p generico. Applico step 1 a

$$\varphi'(x) = (n+1)|x|^n$$

$$v(x, y) = |u(x, y)|^n u(x, y) = \varphi(u(x, y))$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \varphi'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (n+1)|u(x, y)|^n \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Dallo step 1 deduciamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)|^{n+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x, y)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right| dx dy \\ &= (n+1) \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^n \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dx dy \\ &\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^{\frac{np}{p-1}} dx dy \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dx dy \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Scego $n = p-1$ e ottengo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)|^p dx &\leq p \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^p dx dy \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dx dy \right\}^{1/p} \\ &\leq \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}^{p-1} \|u\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d} \end{aligned}$$

Da qui ho finito

Step 3 Scegliamo n in modo tale che $\frac{np}{p-1} = p_* = \frac{pd}{d-p}$

Allora la disuguaglianza diventa

$$\begin{aligned} \|u(x, 0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})}^{n+1} &\leq (n+1) \underbrace{\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}_+^d)}^n}_{\leq (p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^n} \underbrace{\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}}_{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}} \end{aligned}$$

Da qui basta elevare alla $\frac{1}{r+1}$. Chi è $r+1$?

Farendo i conti si ottiene $r = \frac{d(p-1)}{d-p}$ da cui $r+1 = \frac{p(d-1)}{d-p} = \hat{p}_*$

Osservazione Abbiamo usato

$$\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}_+^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$\uparrow$ ovvia $\uparrow$ immersione pura su tutto lo spazio

Step 4 La stima nei $q \in [p, \hat{p}_*]$ segue per interpolazione.

Teorema Sia $d \geq 2$ intero, e sia $p \in [1, +\infty]$.

Allora per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ esiste unica

$$\text{Tr}: W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^{d-1})$$

con le proprietà richieste

→ lineare,

→ $[\text{Tr } u](x) = u(x, 0)$ se $u \in C^0 \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

→ valgono le stime come nella prop.

→ vale la formula di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$
$$- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{u(x,0)}_{[\text{Tr } u](x)} \varphi(x,0) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (non solo per $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$)
 $\uparrow$
(e in realtà anche per φ meno regolari)

Dim Come defisco $\text{Tr } u$?

→ Prendo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

→ La estendo per parità a $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

→ Approssimo $\hat{u}$ deluxe con $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

→ Osservo che $\{u_n\}$ è di Cauchy nella $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}^d}$, dunque anche nella $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$ (full norm)

→ Per la proposizione $\{u_n(x,0)\}$ è di Cauchy in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$

→ Definisco $\text{Tr } u$ come il limite di questa successione.

È ben posta, cioè il limite dipende dalla u scelta? No!

Solito trucco: se $\{u_n\}$ sono altre approx, allora la succ. alternata $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots$ è ancora di Cauchy, e idem le sue restrizioni al bordo.

Linearità e stime Ovvie per passaggio al limite

Cocidenza se $u \in C^0(\mathbb{R}_+^d)$ L'estesa $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

e da posso approx. per convoluzione e moltiplicazione per cutoff in modo da avere supporto compatto. ↗ ad $\hat{u}$

Le approx. convergono unif. sui compatti di $\mathbb{R}^d$, quindi le restrizioni convergono a $u(x,0)$ unif. sui cpt. di $\mathbb{R}^{d-1}$. Il limite è lo stesso che in L^q .

Integrazione per parti Vale per le approx. $u_n(x,y)$ e poi si passa al limite.

Infatti la convergenza L^p ed L^q si traducono in conv. puntuali q.o. dominate a meno di s.succ., e questo basta ed avanza per passare al limite negli integrali.

Oss. Nei RMS posso mettere norme solo su $\mathbb{R}_+^d$ se tengo conto del fattore 2 che viene fuori dai ribattamenti