

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 43

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Teorema (RELLICH - KONDRACHOV) (vedi les. 36 IStAM 19/20)

Sia $d \geq 1$ un intero. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto **LIMITATO** per cui valgono i teoremi di immersione (si usa alla fine). Sia $p \geq 1$.

↑
incluso $+\infty$

Caso $p < d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ è COMPATTA per ogni $q < p^*$ (minore **STRETTO**)

Cometti dopo video

Caso $p = d$ L'immersione di sopra è COMPATTA per ogni $q \in [1, +\infty)$

↑
escluso

Caso $p > d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\text{clos}(\Omega))$ è COMPATTA.

Def. Siano X e Y spazi metrici e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Si dice che f è **COMPATTA** se manda limitati in relativamente compatti.

Detto con le succ: per ogni $\{x_n\} \subseteq X$ limitata in X , la succ. $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ delle immagini ha s.succ. cov. in Y .

Dim. **Caso $p > d$** Praticamente è A.A. classico. Infatti

bound su $\|u_n\|_{1,p,\Omega}$ produce un bound su $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)}$ e sulle costanti di Hölder.

Caso $p = d$ Facile. Dato $q < +\infty$, esiste $\hat{p} < d$ tale che $q < (\hat{p})^*$ (basta osservare che $(\hat{p})^* \rightarrow +\infty$ quando $\hat{p} \rightarrow d^-$)

Bound su $\|u_n\|_{1,p,\Omega}$ produce bound su $\|u_n\|_{1,\hat{p},\Omega}$ (qui uso che Ω è limitato) e ora uso il risultato per $\hat{p} < d$.

Caso $p < d$ Questo è il caso vero. Cosa devo fare? Data

$$\mathcal{F} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p,\Omega} \leq M\}$$

devo dimostrare che $\mathcal{Y}$ è rel. cpt. in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$
(fare con le famiglie è + comodo che con le succ.)

ROAD MAP

→ Iniziare con il caso $q=1$

→ Concludere con solito trucco di interpolazione

Caso $q=1$ L'idea è dim. che $\mathcal{Y}$ soddisfa hp di AA. versione L^1 .
Le prime due ipotesi (Ω limitato e $\|u\|_{L^1(\Omega)}$ limitata) sono ovvie. Resta da verificare che

↑ [Esponente corretto dopo video]

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall R \in \mathbb{R}^d \quad |R| \leq \delta \Rightarrow \|\tau_R \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Step 1 Dato $k \geq 1$ intero, poniamo

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega : \overline{B}\left(x, \frac{1}{k}\right) \subseteq \Omega \right\}$$

$$\text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}$$

e osserviamo che

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

(sono insiemini decrescenti a $\cap$ vuota contenuti in un Ω limitato (basterebbe misura finita)).

Step 2 Dimostriamo che

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{p'}}$$

↑ *radius*

$$\text{LHS} \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R)| dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| dx$$

Stimiamo il secondo (il primo è analogo)

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| \cdot 1 dx \leq \|\hat{u}\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_k)} \cdot \|1\|_{L^{p'}(\Omega \setminus \Omega_k)}$$

$$\uparrow \frac{1}{p} \quad \uparrow \frac{1}{p'} \quad \leq \|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\hat{u}\|_{L^p(\Omega)} \quad \cdot \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{p'}}$$

Step 3 Dim. che per $|R| \leq \frac{1}{k}$ vale la stima

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq |R| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p}$$

↑
interno

Supponiamo $u \in C^\infty(\Omega)$. Allora se $x \in \Omega_k$ e $|R| \leq \frac{1}{k}$, allora $x+R \in \Omega$ e $x \in \Omega$ e quindi

$$|\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| = |u(x+R) - u(x)| \quad (\text{pongo } \psi(t) := u(x+Rt))$$

$$= |\psi(1) - \psi(0)|$$

$$= \left| \int_0^1 \psi'(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\psi'(t)| dt$$

$$= \int_0^1 |\langle \nabla u(x+Rt), R \rangle| dt$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} |R| \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt$$

Integro in dx :

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq |R| \int_{\Omega_k} dx \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt$$

$$= |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k} |\nabla u(\underbrace{x+Rt}_y)| dx$$

$$\stackrel{dx=dy}{=} |R| \int_0^1 dt \int_{\underbrace{\Omega_k+Rt}_{\subseteq \Omega}} |\nabla u(y)| dy$$

$$\leq |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega} |\nabla u(y)| dy$$

$$= |R| \int_{\Omega} |\nabla u(y)| \cdot \frac{1}{\frac{1}{p}} dy$$

Applicando Hölder otteniamo che

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+\mathcal{R}) - \hat{u}(x)| dx \leq |\mathcal{R}| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega)\}^{\frac{1}{p'}}$$

Se u è sdo $W^{1,p}(\Omega)$, allora la approssimiamo low-cost con delle $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e tutto passa al limite (forse potrebbe servire di staccarsi ulteriormente dal bordo per avere la convergenza dei gradienti: CONTROLLARE)

Step 4 Conclusione in $L^1(\Omega)$. Mettendo insieme gli step 2 e 3 si ottiene

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mathcal{R}} \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega)} &= \|\dots\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} + \|\dots\|_{L^1(\Omega_k)} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{p'}} \quad 1^\circ \\ &\quad + |\mathcal{R}| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{\frac{1}{p'}} \quad 2^\circ \end{aligned}$$

Verifichiamo per bene che $\mathcal{U}$ soddisfa h_p (ii) di A.A. L^1 .

- Ci viene dato $\varepsilon > 0$
 - Scegliamo k t.c. $1^\circ \leq \frac{1}{2} \varepsilon$
 - Visto k , scegliamo $\delta \in (0, \frac{1}{k}]$ t.c. $2^\circ \leq \frac{1}{2} \varepsilon$ appena $|\mathcal{R}| \leq \delta$
- Così abbiamo finito

Achtung! Nel caso $p = 1$, non è vero che il 1° termine va a 0 perché $\frac{1}{p'} = 0$.

In questo caso occorre essere più attenti nello step 1 e dim. che

$$\|\tau_{\mathcal{R}} \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} \leq 2 \|u\|_{L^{\hat{p}}(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{\hat{p}'}}$$

Scegliendo $\hat{p} > 1$ per cui ancora $u \in L^{\hat{p}}(\Omega)$ (ce ne sono fino a 1^*)

Caso con $q < p_*$ generico

SLOGAN: Limitato in L^{p_*} e convergente in L^1 } Ω limitato
implica convergente in L^q per ogni $q < p_*$

Segue dalla disuguaglianza di interpolazione: fissati $1 < q < p_*$ esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\alpha \cdot \|u\|_{L^{p_*}(\Omega)}^{1-\alpha}$$

Facile conseguenza di Hölder

Come si conclude?

Se $\{u_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, allora

- u_n è limitata in $L^{p_*}(\Omega)$ (qui si usano le immersioni)

- $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in $L^1(\Omega)$

e quindi $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in $L^q(\Omega)$.

— o — o —

L'ESEMPIO Nel caso $q = p_*$ Ω immersione NON è compatta.

Dim Per riscalamiento

Step 1 Esiste $\{x_n\} \subseteq \Omega$ e $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c.

$B(x_n, r_n) \subseteq \Omega$ e a 2 a 2 disgiunte



Step 2 Scelgo $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$ non identic. nulla e la riscalo

$$u_n(x) = \lambda_n \varphi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right) \in C_c^\infty(B(x_n, r_n))$$

↑
scelgo in modo che $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$

Step 3 Osservo che $\|u_n\|_{L^{p_*}(\Omega)}$ sono equilimitate, anzi vanno a 0 (lo stesso vale per tutti le $\|u_n\|_{L^q(\Omega)}$ con $q < p_*$)

Per questo occorre fare il conto

Step 4 Osservo che $\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ sono COSTANTI (sembra un miracolo, ma è la def di p^* che produce questo)

Step 5 Concludo osservando che $\|u_m\|_{1,p,\Omega}$ sono equilimitate, ma $\{u_m\}$ non ha s.succ. conv. in $L^{p^*}(\Omega)$ perché non ha s.succ. di Cauchy, essendo

$$\int_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)|^{p^*} dx = \int_{\Omega} |u_m(x)|^{p^*} dx + \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p^*} dx$$

↑
i supporti sono disgiunti se $m \neq n$

= 2 costante per ogni $m \neq n$.

— o — o —

Conto da fare: trovare λ_m in funzione di R_m .

— o — o —