

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 42

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio ispirato da teo. cum. cpt. Sia $d \geq 1$ intero.

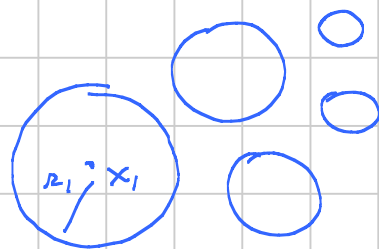
Sia Ω una unione numerabile di palle disgiunte

$$\Omega := \bigcup_{m=1}^{\infty} B(x_m, r_m)$$

Allora

$$\text{meas}(\Omega) = c(d) \sum_{m=1}^{\infty} r_m^d$$

↑
misura della palla unitaria



Consideriamo $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che è costantemente uguale a λ_m in ogni $B(x_m, r_m)$. È evidente che $\nabla u \equiv 0$ in Ω (rincollamento)

Inoltre

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ c(d) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^p r_m^d \right\}^{1/p}$$

Fissato p , possiamo fare in modo che $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ e che $u \in L^q(\Omega)$ se e solo se $q \leq p$.

Ad esempio, se prendiamo $p = \frac{7}{7}$, possiamo porre

$$\lambda_m^{\frac{7}{7}} r_m^d = \frac{1}{m \log^2 m} \leftarrow \text{serie che converge a stento}$$

$$\text{e } r_m = \frac{1}{m}, \text{ cioè } \lambda_m = \left\{ \frac{m^{d-1}}{\log^2 m} \right\}^{\frac{1}{7/7}}.$$

Con queste definizioni è chiaro che $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ (se $d \geq 2$) e $u \in W^{1, \frac{7}{7}}(\Omega)$. Inoltre se $q > \frac{7}{7}$ otteniamo

$$\int_{\Omega} |u(x)|^q dx = c(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^d} \cdot \lambda_m^q = c(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^d} \left(\frac{m^{d-1}}{\log^2 m} \right)^{\frac{q}{7/7}} = +\infty$$

↑
l'esponente di m è < 1

Perché l'esponente di n al denominatore è < 1 ?

L'esponente è

$$d - \frac{q}{q-1} (d-1) = \left(1 - \frac{q}{q-1}\right) d + \frac{q}{q-1}$$

Per $q = \infty$ viene 1 ed è una funzione decrescente di q .

Conseguenza 1: in questo insieme Ω non valgono le immersioni

Se valersero, poiché $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dovrebbe essere anche in un L^p migliore, ma abbiamo appena dimostrato che non ci sta!!

— o — o —

Sempre pensando alle stesse palle $B(x_n, r_n)$ costruiamo u_n in maniera che sia $\neq 0$ solo in $B(x_n, r_n)$, dove è costante λ_n .
Scegliamo λ_n in modo che $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \text{costante}$

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \|u_n\|_{L^p(B(x_n, r_n))} = \lambda_n \{c(d) r_n^d\}^{1/p} = c(d)^{1/p} \lambda_n r_n^{d/p}$$

Ci basta porre $\lambda_n := r_n^{-\frac{d}{p}}$

Con la scelta di sopra le u_n sono limitate in $W^{1,p}(\Omega)$.
Inoltre possiamo anche fare Ω limitato, e non solo di misura finita.

Domanda: $\{u_n\}$ è una successione compatta in qualche L^q ?

Risposta: di certo non è compatta in $L^p(\Omega)$, perché se lo fosse sarebbe di Cauchy (almeno una s.succ.), ma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)|^p dx &= \lambda_m^p c(d) r_m^d + \lambda_n^p c(d) r_n^d \\ &= \text{costante} \neq 0 \quad \text{se } m \neq n. \end{aligned}$$

Conseguenza 2: non vale in Ω l'immersione compatta
 $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ (stesso p)

Altra domanda: la successione $\{u_n\}$ è rel. cpt. in $L^q(\Omega)$ per qualche $q < p$?

Risposta: $u_n \rightarrow 0$ in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p$, quindi sì.
Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_n(x)|^q dx &= \lambda_n^q c(d) r_n^d = c(d) r_n^d r_n^{-\frac{dq}{p}} \\ &= c(d) r_n^{d(1-\frac{q}{p})} \end{aligned}$$

Ora l'esponente di r_n è > 0 e $r_n \rightarrow 0$ perché la misura è finita.

Ultima domanda: u_n è limitata in $L^q(\Omega)$ per qualche $q > p$?

Risposta: No perché resta r_n elevato ad esponente negativo.

- Conseguenze
- ① Ω ha misura finita, ma in questo aperto non valgono i teoremi di immersione
 - ② L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ NON è compatta
 - ③ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ potrebbe essere cpt. per ogni $q < p$.

Come si spiega tutto ciò alla luce di Rellich-Kondrachov?

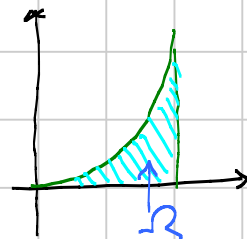
→ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{\textcircled{1}}(\Omega)$ non richiede particolari ipotesi su Ω

→ Compattezza in L^1 + limitatezza in $L^p \Rightarrow$ compattezza in L^q per ogni $q < p$ (interpolazione a fine teorema Rk)
Questo dice che ③ è vera.

→ Per dimostrare la compattezza dell'immersione negli L^q con $q > p$ (fino a p escluso) serve regolarità di Ω per avere immersioni.

Esempio 2 Dominio con una cuspid

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2 \}$$



In questo Ω non valgono le immersioni come uno se le aspetta (volendo è un mondo parallelo in cui valgono immersioni con esponenti diversi)

Prendiamo $u(x,y) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$ (l'idea è che u ha problemi grossi in $(0,0)$, ma l'insieme è "piccolo" e quindi "pesa meno").

Vediamo in quali $L^q(\Omega)$ e quali $W^{1,p}(\Omega)$ sta

$$\begin{aligned} u \in L^q &\Leftrightarrow \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^{\alpha q}} < +\infty \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha q - 2}} dx < +\infty \\ &\Leftrightarrow \alpha q - 2 < 1 \Leftrightarrow q < \frac{3}{\alpha} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} u \in W^{1,p} &\Leftrightarrow u_x \in L^p \Leftrightarrow \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^{(\alpha+1)p}} < +\infty \\ &\Leftrightarrow p < \frac{3}{\alpha+1} \end{aligned}$$

Prendiamo ad esempio $\alpha = 1$. Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p < \frac{3}{2}$.
Di conseguenza possiamo aspettarsi

$$u \in L^q(\Omega) \quad \forall q < \left(\frac{3}{2}\right)^* = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$\uparrow$
 $\frac{pd}{d-p} = \frac{2p}{2-p}$

ma invece abbiamo verificato che questo vale solo per $q < 3$.

Altro esempio analogo : in $\mathbb{R}^2$ troviamo funzioni non limitate solo in $W^{1,p}$ con $p \leq 2$ (dopo scatta l'immersione in $L^\infty + \text{Hölder}$)

Vediamo che accade in Ω .

La funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ è NON limitata per ogni $\alpha > 0$, ma se

uso α piccolo sta praticamente in $W^{1,3}(\Omega)$.

Detto meglio: $\forall p < 3 \exists \alpha > 0$ t.c. $\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(\Omega)$

o in altri termini: $\forall p < 3 \quad W^{1,p}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Cosa accade per $p=3$?

Proviamo con $\log x =: u(x, y)$

$$\int_{\Omega} |u_x|^3 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^3} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (\text{😞})$$

Non ci arrendiamo e proviamo $|\log x|^{1/2}$ in modo che

$$u_x = \frac{1}{2} \frac{1}{|\log x|^{1/2}} \frac{1}{x} \quad \text{a meno dei segni}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_x|^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} \frac{1}{|\log x|^{3/2}} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1}{x |\log x|^{3/2}} dx < +\infty \quad (\text{😊}) \end{aligned}$$

Quindi nemmeno $W^{1,3}(\Omega) \not\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Congettura $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in $L^\infty(\Omega)$ (e pure meglio)
se $p > 3$.

↑
Esercizio :

— o — o —