

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 41

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Un classico: $W^{1,d}(\Omega)$ non si immerge in $L^\infty(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

1° fatto: mancanza di stime per $p \neq d$ Dimostriamo che per $p \neq d$ non si può avere una stima del tipo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Dim Riscaldamento orizzontale. Consideriamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $\lambda > 0$ consideriamo

$$\hat{\varphi}(x) := \varphi(\lambda x).$$

Si vede che

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

e

$$\|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Se valesse la stima dell' enunciato avremmo che

$$\|\varphi\|_{L^\infty} = \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} \leq c(p,d) \|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^p} = \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} c(p,d) \|\nabla \varphi\|_{L^p}.$$

Se $\frac{d}{p} \neq 1$, cioè $p \neq d$, allora si ottiene un assurdo per $\lambda \rightarrow +\infty$ oppure per $\lambda \rightarrow 0^+$.

2° fatto: mancanza di stime per $p = d$ Anche per $p = d$ la stima di sopra non è possibile.

Dim Se fosse vera per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora sarebbe vera anche per ogni $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$, semplicemente ragionando per approssimazione ($u_n \rightarrow u$ deluxe, ma allora $\{\nabla u_n\}$ è di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$, ma allora $\{u_n\}$ è di Cauchy in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$)

Basta trovare controesempio in $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ e lo cerchiamo RADIALE.
Poi siamo

$$u(x) := \begin{cases} 1 - |x|^\alpha & \text{se } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È evidente che $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 1$. Ora

$$\nabla u(x) = -\alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x}{|x|} \quad \text{se } x \in B(0,1)$$

e quindi $|\nabla u(x)| = \alpha |x|^{\alpha-1}$ e integrando

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^d dx &= \int_{B(0,1)} |\nabla u(x)|^d dx = \alpha^d \int_{B(0,1)} |x|^{(\alpha-1)d} dx \\ &= \alpha^d \int_0^1 r^{(\alpha-1)d} \cdot r^{d-1} dr = \alpha^d \int_0^1 \frac{1}{r^{1-\alpha d}} dr \\ &= \frac{\alpha^d}{\alpha d} [r^{\alpha d}]_0^1 = \frac{\alpha^{d-1}}{d} \end{aligned}$$

$$\text{e infine} \quad \|\nabla u\|_{L^d} = \frac{1}{d^{1/d}} \alpha^{1-\frac{1}{d}}.$$

Se fosse vera la disuguaglianza di Poincaré, allora

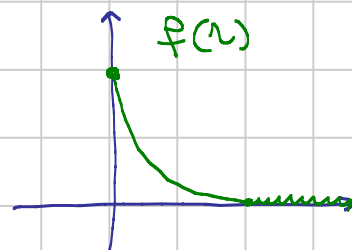
$$1 = \|u\|_{L^\infty} \leq C(p,d) \|\nabla u\|_{L^d} = C(p,d) \frac{1}{d^{1/d}} \alpha^{1-\frac{1}{d}}$$

Appena $d \geq 2$, questa è assurda quando $\alpha \rightarrow 0^+$

3° fatto Esiste $R > 0$ ed esiste $u \in W^{1,d}(B(0,R))$, ma $u \notin L^\infty(B(0,R))$

Dim. 1° tentativo Cerchiamo un esempio radiale del tipo

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \quad \text{per un qualche } \alpha > 0$$



Gratis: non sta in $L^\infty(B(0,R))$ per ogni $R>0$.

Vediamo se sta in $W^{1,d}$. Come al solito ci si riduce a

$$\int_0^R |f'(r)|^d \cdot r^{d-1} dr \quad \text{dove ora } f(r) = \frac{1}{r^\alpha}, \text{ cioè}$$
$$\alpha^d \int_0^R \frac{1}{r^{(\alpha+1)d}} r^{d-1} dr = \alpha^d \int_0^R \frac{1}{r^{1+\alpha d}} dr$$

e purtroppo questo diverge per ogni $\alpha>0$, quindi non va bene.

Idea: trovare qualcosa che diverga "ancora meno".

SLOGAN: Usa i logaritmi!

Dim, 2° tentativo $u(x) = |\log|x||^\alpha$



Certamente $u \notin L^\infty(B(0,R))$ per ogni $R>0$. Vediamo se sta in $W^{1,d}$:

$$f(r) = |\log|r||^\alpha \rightsquigarrow |f'(r)| = \alpha |\log|r||^{\alpha-1} \frac{1}{r}$$

$$\int_0^R |f'(r)|^d r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow \int_0^R \alpha^d |\log|r||^{(\alpha-1)d} \frac{1}{r^d} \cdot r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{1}{r} \frac{1}{|\log|r||^{(1-\alpha)d}} dr < +\infty \Leftrightarrow (1-\alpha)d > 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 1 - \frac{1}{d}$$

Ad esempio, se prendiamo $\alpha = \frac{1}{3}$, allora siamo sicuri di avere un controesempio che funziona per ogni $d \geq 2$.

— 0 — 0 —

Osservazione Notare la differenza tra i vari enunciati

→ fatto 2: non so stimare $\|u\|_{L^\infty}$ con $\|\nabla u\|_{L^d}$ **NON STIMABILITÀ**

→ fatto 3: esiste u con $\nabla u \in L^d$ ma $u \notin L^\infty$. **NON ESISTENZA**

Le due cose sono più collegate di quanto si potrebbe pensare

(Brutale: SE LO SO STIMARE, ALLORA IN QUALCHE MODO ESISTE)

Oss. È facile costruire controesempi su tutto $\mathbb{R}^d$: basta moltiplicare $|\log|x||^{1/3}$ per una cutoff nulla al di fuori di una palla centrata nell'origine.

— o — o —

Ottimalità delle stime sulle costanti di Hölder

Già visto: se vale una disuguaglianza del tipo

$$\text{Höld}_\alpha(u) \leq C(\alpha, d, p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

↑ costante di α -Hölder
di u in $\mathbb{R}^d$

allora per forza $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ e $p > d$.

Mostriamo ora che esiste $u \in W^{1,p}(B(0,R))$ che non è β -Hölderiana per ogni $\beta > 1 - \frac{d}{p}$

(Ulteriore esempio di non stimabilità $\Rightarrow$ non esistenza)

Primo tentativo Consideriamo $u(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$.

Questa è α -Hölderiana, ma NON β -Hölderiana per $\beta > \alpha$.

Vediamo se sta in $W^{1,p}(B(0,R))$

$$f(r) = |r|^\alpha \rightsquigarrow |f'(r)| = \alpha |r|^{\alpha-1}$$

$$u \in W^{1,p} \Leftrightarrow \int_0^R |f'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow \alpha^p \int_0^R r^{(\alpha-1)p} r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 1-d-\alpha p + p < \times \Leftrightarrow \alpha p > p-d \Leftrightarrow \alpha > 1 - \frac{d}{p}.$$

Quindi questa funzione non sta in $W^{1,p}$.

Secondo tentativo (Usa i logaritmi!!) Proviamo con

$$u(x) = \frac{|x|^\alpha}{|\log|x||} \quad \text{con } \alpha = 1 - \frac{d}{p}$$

↑ problemi per $|x|=1$, quindi $R = \frac{1}{2}$

Vediamo se sta in $W^{1,p}(B(0, 1/2))$.

$$f(r) = \frac{r^\alpha}{|\log r|} \quad \leadsto \quad |f'(r)| = \left| \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\log r} + \frac{r^\alpha}{|\log r|^2} \frac{1}{r} \right|$$
$$= \text{due termini del tipo } \frac{r^{\alpha-1}}{|\log r|} \text{ e } \frac{r^{\alpha-1}}{|\log r|^2}$$

Quando elevo alla p mi riduco agli integrali

$$\int_0^{1/2} \frac{r^{(\alpha-1)p}}{|\log r|^p} r^{\alpha-1} dr \quad \text{e questo va bene, cioè converge,}$$

perché resta

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{r |\log r|^p} dr. \quad \text{Il secondo integrale è ancora meglio}$$

perché ha $2p$ all'esponente del log.

Con un conto di Analisi 1 si verifica che u è α -Hölderiana
ma non β -Höld per $\beta > \alpha$.

Oss. La funzione del secondo tentativo è "un po' più Höld"
di quella del primo, un di poco.

RIASSUNTO DELLA LEZIONE: potenza dei logaritmi nel costruire i
controesempi nei casi critici

— o — o —