

# Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 40

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Consideriamo  $B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^d$  e sia  $f \in C^1((0, R))$ .  
Poniamo

$$u(x) = f(|x|).$$

Allora

$$u \in W^{1,p} \Leftrightarrow \int_0^R \{ |f(r)|^p + |f'(r)|^p \} r^{d-1} dr < +\infty$$

e in tal caso  $\nabla u(x) = f'(|x|) \frac{x}{|x|}$ .

Dim. Dobbiamo dimostrare che

presunta  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$

$$\int_{B(0,R)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{B(0,R)} \overbrace{f'(|x|) \frac{x_i}{|x|}}^{\text{presunta } \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)} \varphi(x) dx$$

per ogni indice  $i \in \{1, \dots, d\}$  e per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(B(0, R))$ .

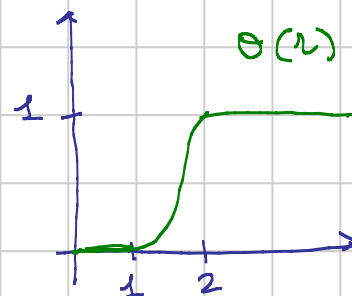
Già sappiamo dalla lezione precedente che se il presunto  $\nabla u$  stanno in  $L^p(B(0, R))$ .

Sarebbe la classica integrazione per parti se fosse che  $u \in C^1(B(0, R))$  ma potenzialmente ci sono pbm. in  $x=0$  (sia per colpa di  $f$ , sia per colpa di  $\frac{x}{|x|}$ ).

Idea: spostarsi un po' lontano da 0!!

Consideriamo una  $\theta$  come in figura e poniamo

$$\varphi_r(x) := \varphi(x) \cdot \theta\left(\frac{|x|}{r}\right)$$



Osserviamo che  $\varphi_r(x) = 0$  in  $B(0, 1)$  e che  $\varphi_r(x) = \varphi(x)$  fuori da  $B(0, 2r)$ .

Di conseguenza possiamo usare l'integr. per parti per  $\varphi_r$ , quindi

$$\int_{B(0,R)} u(x) \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\underbrace{C(r,R)}_{\text{corona di raggio } r \text{ ed } R}} u(x) \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}(x) dx$$

$$= - \int_{C(r,R)} f(|x|) \frac{x_i}{|x|} \varphi_r(x) dx$$

↑  
in  $C(r,R)$  la funzione  $u \in C^1$

Ora bisogna passare al limite per  $r \rightarrow 0^+$ . Nel RHS c'è convergenza puntuale dominata. Nel LHS occorre calcolare

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \theta\left(\frac{|x|}{r}\right) + \varphi(x) \theta'\left(\frac{|x|}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} \frac{x_i}{|x|}$$

Moltiplicando per  $u$  e integrando in  $B(0,R)$ , il primo termine passa al limite per conv. puntuale (q.o. cioè in questo caso per  $x \neq 0$ ). Il secondo termine è

$$\int_{B(0,R)} u(x) \varphi(x) \theta'\left(\frac{|x|}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{x_i}{|x|} dx$$

CLAIM: 2° termine  $\rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0^+$ .

Osserviamo che l'integrale in realtà è in  $C(1,2r)$  perché altrimenti  $\theta' = 0$ .

Idea: aggiungo e tolgo  $\varphi(0)$ .

$$\int_{C(1,2r)} u(x) \varphi(0) \theta'\left(\frac{|x|}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{x_i}{|x|} dx$$

e questo è identicamente nullo perché l'integrandola è dispari rispetto alla variabile  $x_i$

l'altro termine lo maggioro con

$$\frac{1}{n} \int_{C(r, 2r)} |u(x)| \cdot \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\leq L|x|} \cdot \underbrace{\left| \theta' \left( \frac{|x|}{r} \right) \right|}_{\text{limitato}} dx$$

$$\leq L 2r$$

perché  $\varphi$  è Lipschitziana

$$\leq \text{cost} \cdot \int_{C(r, 2r)} |u(x)| dx \xrightarrow{0 \quad 0 \quad 0} 0 \quad \text{per p. dominata}$$

Esercizio Dimostrare un risultato analogo assumendo solo  $f \in L^1_{\text{loc}}((0, R))$  e  $f' \in L^1_{\text{loc}}((0, R))$  + convergenza degli integrali.

(Si tratta di approssimare  $f$  con funzioni  $C^\infty$  e ragionare come nel caso precedente).

Esercizio Dati  $d \geq 1$  intero,  $p \geq 1$  reale,  $\alpha > 0$  reale,  $R > 0$  reale. Stabilire quando accade che

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(B(0, R))$$

Per la caratterizzazione precedente, poniamo  $f(r) = \frac{1}{r^\alpha}$  e ci riduciamo a verificare che

$$\int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p}} \cdot r^{d-1} < +\infty ;$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^{(\alpha+1)p}} r^{d-1} < +\infty .$$

$$f'(r) = -\alpha \frac{1}{r^{\alpha+1}}$$

La seconda condizione è + restrittiva e porta a

$$(\alpha+1)p - d + 1 < 1 \quad \leadsto \quad (\alpha+1)p < d \quad \leadsto \quad \alpha < \frac{d}{p} - 1$$

$$\text{Osserviamo che } \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^q(B(0, R)) \Leftrightarrow \alpha q < d \Leftrightarrow \alpha < \frac{d}{q}$$

Se invece volessimo  $\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{2,p}(B(0,R))$  dovremmo aggiungere

$$\int_0^R \frac{|f''(r)|^p}{r^p} r^{d-1}$$

$$f''(r) \sim \frac{1}{r^{\alpha+2}} \quad \text{a meno di costanti}$$

e quindi la condizione diventa

$$\int_0^R \frac{1}{r^{(\alpha+2)p} \cdot r^p} r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\text{cioè } (\alpha+2)p + p - d + 1 < 1 \Leftrightarrow (\alpha+3)p < d$$

Sembra ragionevole che  $\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{m,p}(B(0,R)) \Leftrightarrow (\alpha+2m-1)p < d$

Esercizio Dimostrare che per ogni  $p < d$  esiste  $u \in W^{1,p}(B(0,R))$  ma  $u \notin L^q(B(0,R))$  per ogni  $q > p_*$ .

1° tentativo Uso funzioni radiali  $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ . Sarebbe

$$(\alpha+1)p < d \quad \text{e} \quad \alpha \geq \frac{d}{q} \quad \forall q > p_*$$

$\Downarrow$

$$\alpha < \frac{d}{p} - 1 \quad \text{e} \quad \alpha \geq \frac{d}{q}$$

Sono compatibili?  $\frac{d}{q} \leq \alpha < \frac{d}{p} - 1$ . Trovo un tale  $\alpha$  se

$$\frac{d}{q} < \frac{d}{p} - 1 \quad \leadsto \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{d-p}{pd} \quad \leadsto \quad q > \frac{pd}{d-p} = p_*$$

Non appena  $q > p_*$  è fatta, nel senso che

$\forall q > p_*$  trovo un  $\alpha$  buono, quindi trovo  $u \in W^{1,p} \setminus L^q$   
 $\uparrow$  dipendente da  $q$ .

Rilancio: posso ottenere una  $u$  che va bene per ogni  $q > p_*$ .

SLOGAN: usare i logaritmi !!!

Brutalmente, voglio  $u \in L^{p_*}$  molto al limite

Una scelta è  $u(x) = \frac{1}{|x|^{d/p_*} \cdot |\log x|}$   
↑ aiuta la convergenza

Poniamo quindi  $\varphi(r) = \frac{1}{r^{d/p_*} \cdot |\log r|}$  (supponiamo  $R \in (0, 1)$ )

e verifichiamo le 2 proprietà richieste

$$1: \int_0^R |\varphi(r)|^q r^{d-1} dr = +\infty \quad \forall q > p_*$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^{dq/p_*} |\log r|^q} r^{d-1} dr = \int_0^R \frac{1}{r^{dq/p_* - d + 1} |\log r|^q} dr$$

↑ ↑  
> 1, quindi diverge

$$2: \int_0^R \{ |\varphi(r)|^p + |\varphi'(r)|^p \} r^{d-1} dr < +\infty$$

Per la parte con  $|\varphi(r)|$  non ci sono problemi perché l'esponente di  $r$  è  $< 1$ . Per  $\varphi'(r)$  ci sono due termini

$$\frac{1}{r^{\frac{d}{p_*} + 1} |\log r|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r^{d/p_*} |\log r|^2} r$$

Dal punto di vista dell'esponente di  $r$  sono simili.

Quando elevo alla  $p$  l'esponente di  $r$  diventa

$$\left(\frac{d}{p_*} + 1\right)p - d + 1 \quad \text{e questo è } \leq 1 \text{ se e solo se}$$

$$\left(\frac{d}{p_*} + 1\right)p - d \leq 0 \quad \text{e dovrebbe essere } = \text{ per defn di } p_*$$

Grazie al  $\log r$  che avanza al denominatore l'integrale converge.

— o — o —