

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 39

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Riscalamento orizzontale e immersioni di Sobolev

Sia $d \geq 1$ intero, e sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Per ogni $\lambda > 0$ consideriamo

$$\hat{\varphi}(x) := \varphi(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Come cambiano le norme di φ quando passo a $\hat{\varphi}$?

→ Norme della funzione

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\lambda x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\lambda^d} \varphi(y) dy$$

$\uparrow$
 $y = \lambda x$
 $dy = \lambda^d dx$

e analogamente

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(x)|^p dx = \frac{1}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p dx$$

da cui

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\lambda^{d/p}} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

→ Norme del gradiente
e quindi

$$\nabla \hat{\varphi}(x) = \nabla [\varphi(\lambda x)] = \lambda \nabla \varphi(\lambda x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \hat{\varphi}(x)|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi(x)|^p dx$$

da cui

$$\|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Gli esponenti nelle immersioni pme sono gli unici possibili.

Supponiamo che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, q, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Questa formula deve valere per φ e per ogni $\hat{\varphi}$, quindi

$$\frac{1}{\lambda^{d/q}} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, q, d) \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Gli esponenti di λ devono essere uguali, altrimenti trovo un assurdo per $\lambda \rightarrow 0^+$ oppure per $\lambda \rightarrow +\infty$, quindi

$$-\frac{d}{q} = 1 - \frac{d}{p} \quad \leadsto \quad \frac{d}{p} - \frac{d}{q} = 1 \quad \leadsto \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d} \quad \leadsto \quad \boxed{q = p^*} \\ d > p$$

→ Norme di derivate successive Basta osservare che

$$D^\alpha \hat{\varphi}(x) = D^\alpha [\varphi(\lambda x)] = \lambda^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(\lambda x)$$

da cui

$$\boxed{\|D^\alpha \hat{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\lambda^{d/p}} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}$$

Se imponiamo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, q, d, m) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

con lo stesso argomento troviamo

$$-\frac{d}{q} = m - \frac{d}{p} \quad \leadsto \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{d} \quad \leadsto \quad \boxed{q = \frac{mp}{d - mp}} \quad d > mp$$

→ Costanti di α -Hölder

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x)| &= |\varphi(\lambda y) - \varphi(\lambda x)| \leq \text{Hölder}_\alpha(\varphi) |\lambda x - \lambda y|^\alpha \\ &= \lambda^\alpha \text{Hölder}_\alpha(\varphi) |x - y|^\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Hölder}_\alpha(\tilde{\varphi}) = \lambda^\alpha \text{Hölder}_\alpha(\varphi)}$$

Supponiamo di avere una disuguaglianza pura del tipo

$$\text{Hölder}_\alpha(u) \leq C(p, d, \alpha) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

se è vera per φ e per $\tilde{\varphi}$ deve essere

$$\lambda^\alpha \text{Hölder}_\alpha(\varphi) \leq C(p, d, \alpha) \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

e quindi deve necessariamente essere

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{d}{p}} \quad p > d$$

— o — o —

FUNZIONI RADIALI

Sia $R > 0$ un numero reale

Sia $f: (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misur.

Sia $d \geq 1$ un intero e sia $\Omega = B(0, R)$ in $\mathbb{R}^d$

Poniamo

$$u(x) := f(|x|) \quad \forall x \in B(0, R)$$

Domanda: regolarità Sobolev di u in termini della regolarità Sobolev di f .

Regolarità L^p

$$\int_{B(0, R)} |u(x)|^p dx$$

si può calcolare usando
l'analogo d -dimensionale
delle coordinate polari / sferiche

Si ottiene

$$\int_{B(0,R)} |u(x)|^p dx = c(d) \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr$$

↑
costante che dipende solo dalla dimensione
= misura $(d-1)$ -dimensionale del bordo
della palla unitaria di $\mathbb{R}^d$
(pensare ai casi $d=1, 2, 3$)

e quindi

$$u \in L^p(B(0,R)) \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$$

Oss. Tutti i risultati valgono anche nel caso $\Omega = \mathbb{R}^d$ con $R = +\infty$.

Regolarità $W^{1,p}$

Chi è ∇u ? Formalmente

$$\nabla u(x) = \nabla [\varphi(|x|)] = \varphi'(|x|) \nabla(|x|) = \varphi'(|x|) \boxed{\frac{x}{|x|}}$$

↑
vettore di norma 1

da cui

$$\int_{B(0,R)} |\nabla u(x)|^p dx = \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr$$

e quindi

$$|\nabla u| \in L^p(B(0,R)) \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$$

e di conseguenza

$$u \in W^{1,p}(B(0,R)) \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$$

Regolarità $W^{m,p}$ Come sono fatte le derivate successive di u ?

La formula diventa orribile da scrivere!

1° fatto Per ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vale una scrittura del tipo

$$D^\alpha |x| = \frac{P_\alpha(x)}{|x|^{2|\alpha|-1}}$$

← opportuno polinomio di grado $|\alpha|$ in x omogeneo

Dim "Semplice" inclusione ☺

2° fatto $D^\alpha u(x) = \sum_{k=1}^{|\alpha|} f^{(k)}(|x|) \frac{P_{\alpha,k}(x)}{|x|^{2k-1}}$

← opportuni polinomi di grado k in x omogeneo

dove $f^{(k)}(|x|)$ è moltiplicata per un termine che nell'origine si comporta come $\frac{1}{|x|^{k-1}}$

Dim Altrettanto "semplice" inclusione ☺

Mettendo insieme

$$\begin{aligned} u \in W^{m,p}(B(0,R)) &\Leftrightarrow \int_0^R |f(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \\ &\int_0^R |f'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \\ &\int_0^R \frac{|f''(r)|^p}{r^p} r^{d-1} dr < +\infty \\ &\vdots \\ &\int_0^R \frac{|f^{(m)}(r)|^p}{r^{p(m-1)}} r^{d-1} dr < +\infty \end{aligned}$$

Oss. Bisogna però dimostrare per bene enunciati del tipo

Se $f \in L^1_{loc}((0,R))$ e ha derivata debole $f' \in L^1_{loc}((0,R))$, allora
 $u \in W^{1,p}(B(0,R)) \Leftrightarrow$ convergono i due integrali previsti

— 0 — 0 —