

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 38

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto CONNESSO. Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo che $Du = 0$ (vettore nullo)

$\uparrow$ derivate deboli di ordine 1

Allora u è costante in Ω .

Cannone Visto che TUTTE le deriv. deboli di ordine 1 sono continue, allora $u \in C^1$ e a questo punto è Analisi 2.

Esiste una dimostrazione più diretta? No, sembra che bisogna comunque passare attraverso le convoluzioni, come nella compatibilità classica.

Dato $x_0 \in \Omega$, consideriamo due palle $B(x_0, r) \subset B(x_0, R) \subset \Omega$
 $\uparrow u \in L^1$ qui

Estendiamo u a 0 fuori di $B(x, R)$. In questo modo $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$
Ora facciamo le convoluzioni $\uparrow$ estesa.

$$u_\varepsilon = \hat{u} * \rho_\varepsilon$$

Per le proprietà delle convoluzioni

$$u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^d)$$

$$\hat{Du} * \rho_\varepsilon \rightarrow \hat{Du} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^d)$$

$\nwarrow$ $\nearrow$
estesa di Du ottenuta ponendo
a 0 fuori di $B(x_0, R)$

} questi due fatti
valgono in generale
assumendo solo
 u e Du in $L^1(B(x_0, R))$

Dalla prima deduciamo che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(B(x_0, R))$ ed in particolare, a meno di s.succ., la convergenza è pure puntuale in quasi ogni punto.

Dalla seconda possiamo dedurre lo stesso, che però non è interessante fino a quando non osserviamo che

$$\hat{D}u * p_\varepsilon = D(\hat{u} * p_\varepsilon) = Du_\varepsilon \quad \text{in } B(x_0, 1)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 convoluzione di scambio palla piccola

per ε piccolo ($\varepsilon \leq R-1$).

Ora sappiamo che

$$Du_\varepsilon \rightarrow Du \quad \text{in } L^1(B(x_0, 1)).$$

$\uparrow$ piccola

Fino qui sono tutti fatti generali, che usano solo u e Du sono $L^1_{loc}(\Omega)$.

Sapendo che $Du = 0$, possiamo dedurre che

$$Du_\varepsilon = \hat{D}u * p_\varepsilon = 0 \quad \text{in } B(x_0, 1) \text{ se } \varepsilon \leq R-1$$

quindi per ε piccolo le u_ε sono costanti in $B(x_0, 1)$ e quindi il loro limite L^1 è costante

(Fatto generale: u_ε costanti, $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1 \Rightarrow u$ costante)

Questo dimostra che u è localmente costante, quindi globalmente costante se Ω è connesso (esercizio di topologia)

— o — o —

Ingredienti per approx. DELUXE.

Come ottenere supp. compatto Sia $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

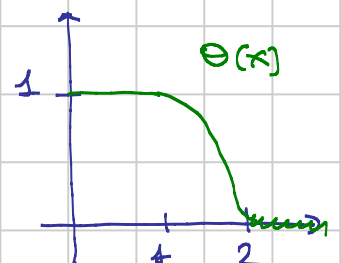
Allora esiste $\{u_m\} \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ t.c.

$$\|u - u_m\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \rightarrow 0$$

e tutte le u_m hanno supporto compatto, cioè $u_m \equiv 0$ al di fuori di una palla il cui centro dipende ovviamente da m .

Dim. Prendo cutoff come in figura e poniamo

$$u_R(x) := u(x) \cdot \Theta\left(\frac{x}{R}\right)$$



È chiaro che $u_R \equiv 0$ fuori da $B(0, 2R)$ e $u_R \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ per il lemma smooth per Sobolev.

Dico che, per $R \rightarrow +\infty$,

$$D^{\alpha} u_R \rightarrow D^{\alpha} u \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

per ogni multiindice con $|\alpha| \leq m$.

Verifichiamo per $m=0$ e $m=1$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x) - u_R(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p \left\{ 1 - \theta\left(\frac{x}{R}\right) \right\}^p dx \rightarrow 0$$

$\downarrow$ puntuale e
dominato

Osservo che $D u_R(x) = D(u(x) \cdot \theta(\frac{x}{R}))$

$$= D u(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{1}{R} u(x) \theta'\left(\frac{x}{R}\right) (1, \dots, 1)$$

$\downarrow$ $D u$ $\downarrow$ 0

Su entrambi i termini c'è convergenza puntuale dominata.

Quindi la conclusione segue ponendo $u_m = u_{R_m}$ con $R_m \rightarrow +\infty$.

— 0 — 0 —

Come regolarizzare?

Convulsione!

— 0 — 0 —

APPROX DELUXE IN $\mathbb{R}^d$

Data $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, esiste $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c. $\|u - u_m\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \rightarrow 0$

1° modo

Prima regolarizzo, poi aggiusto i supporti

Fisso un intero $n \geq 1$.

Step 1 Pongo $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ e scegliendo ε piccolo trovo che

$$\|u_\varepsilon - u\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$$

Step 2 Prendo μ_ε data dallo Step 1 e considero

$$\mu_{\varepsilon,R}(x) := \mu_\varepsilon(x) \cdot \Theta\left(\frac{x}{R}\right)$$

Se R è abbastanza grande, avremo che $\|\mu_{\varepsilon,R} - \mu_\varepsilon\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$.

Mettendo insieme: $\|\mu_{\varepsilon,R} - \mu\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{n}$
 $\uparrow$
la chiamo μ_n .

2° modo Prima aggiusto i supporti, poi regolarizzo

Fisso $n \geq 1$ intero

Step 1 Per ogni $R > 0$ pongo $\mu_R(x) := \mu(x) \Theta\left(\frac{x}{R}\right)$.

Se R è abbastanza grande ho

$$\|\mu - \mu_R\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$$

Step 2 Visto μ_R ricevuto dallo step 1, pongo $\mu_{R,\varepsilon} = \mu_R * \rho_\varepsilon$ e per ε piccolo ottengo

$$\|\mu_R - \mu_{R,\varepsilon}\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$$

$\uparrow$ continua ad avere supp. cpt.
perché lo aveva μ_R (al max si
è allargato di ε)

Come prima pongo $\mu_n := \mu_{R,\varepsilon}$.
— o — o —

Lo stesso argomento funziona per l'approssimazione low-cost
nel caso di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ non necessariamente limitato

Seguiamo la prima via: prima regolarizzo, poi aggiusto i
supporti

(Oss: così non serve il Smooth. Sobolev)

Estendo u a 0 fuori di Ω . Così ottengo $\hat{u}$.

Fisso $n \geq 1$ intero

Step 1 Considero le convoluzioni $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$.
Trovo un $\varepsilon \in (0, \frac{1}{n})$ abbastanza piccolo t.c.
 $\uparrow \uparrow$ **IMPORTANTE**

$$\|\hat{u} - (\hat{u} * \rho_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\|D\hat{u} - (D\hat{u} * \rho_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

$\uparrow$
estesa delle derivate prime

Step 2 Vista da u_ε dello Step 1, che è $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, consideriamo

$$u_{\varepsilon,R}(x) := u_\varepsilon(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{R}\right)$$

Allora esiste $R \geq n$ tale che
 $\uparrow \uparrow$ Apparentemente non serve.

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\|Du_\varepsilon - Du_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$\|\hat{u} - u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{n}$$

Ora voglio togliere le estese. La prima implica banalmente

$$\|u - u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad (\text{basta restringere tutto ad } \Omega)$$

Vediamo cosa accade per le derivate.

Puntello e 2 disuguaglianze

$$\|\hat{D}u - (\hat{D}u * \rho_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

↑↑

$$\|D(\hat{u} * \rho_\varepsilon) - Du_{\varepsilon,2}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

↑↑

non sono immediatamente "triangolabili".

Appena fissiamo $\Omega' \subset \subset \Omega$, non appena ε è abbastanza piccolo, avremo che

$$\hat{D}u * \rho_\varepsilon = D(\hat{u} * \rho_\varepsilon) \quad \text{in } \Omega'$$

e allora potremo applicare la triangolare.

Quindi ponendo $u_n := u_{\varepsilon,2}$ come ottenuto alla fine dello step 2, possiamo concludere che

$$\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

e, fissato $\Omega' \subset \subset \Omega$,

$$\|Du - Du_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{non appena}$$
$$B(x, \frac{1}{n}) \subset \Omega \quad \forall x \in \Omega'$$

il che accade definitivamente in quanto abbiamo scelto $\varepsilon \in (0, \frac{1}{n})$.

— o — o —