

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 37

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Rincollamento di funzioni di Sobolev

Dati A e B due aperti in $\mathbb{R}^d$, e data $u : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} &= v \quad \text{in } A \\ \bullet \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} &= w \quad \text{in } B \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ll} D^\alpha u = v & \text{in } A \\ D^\alpha u = w & \text{in } B \end{array} \right. \text{ con } \alpha \text{ multi-indice}]$$

Allora v e w coincidono in $A \cap B$.

Inoltre $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ esiste in $A \cup B$ ed è quella che ci aspettiamo, cioè

$$[D^\alpha u] \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \begin{cases} v & \text{in } A \\ w & \text{in } B \end{cases} \quad (\text{ben posto perché nell'intersezione coincidono})$$

Più in generale se $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti in $\mathbb{R}^d$ e $D^\alpha u = v_i$ per ogni $i \in I$, allora $D^\alpha u$ esiste in $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ ed è quella che ci aspettiamo.

Step 1 Ipotesi: $v = D^\alpha u$ in A e $w = D^\alpha u$ in B

Tesi: $v = w$ in $A \cap B$

Supponiamo solo $u, v, w \in L^1_{\text{loc}}$ degli aperti corrispondenti

Prendiamo $\varphi \in C_c^\infty(A \cap B)$ e abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B} v \varphi &= \int_A v \varphi = \int_A D^\alpha u \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_A u D^\alpha \varphi \\ &\quad \uparrow \text{supp } \varphi \subseteq A \cap B \quad \uparrow v = D^\alpha u \text{ in } A \quad \uparrow \text{def. di } D^\alpha \quad \text{"} \quad \text{"} \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{A \cap B} u D^\alpha \varphi \end{aligned}$$

$$\int_{A \cap B} w \varphi = \int_B w \varphi = \int_B D^\alpha u \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_B u D^\alpha \varphi$$

Mettendo insieme troviamo

$$\int_{A \cap B} (v-w) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(A \cap B)$$

FLCV $\Rightarrow v = w$ q.o. in $A \cap B$.

Step 2 "Rincollando" v e w (ora posso) ottengo $D^\alpha u$ in $A \cup B$
Devo dim. che

$$\int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{A \cup B} D^\alpha u \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(A \cup B)$$

SE sapessimo che $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, con $\varphi_1 \in C_c^\infty(A)$ e $\varphi_2 \in C_c^\infty(B)$, allora sarebbe fatta, perché

$$\int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi \, dx = \int_{A \cup B} u D^\alpha (\varphi_1 + \varphi_2) \, dx = \int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi_1 \, dx + \int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi_2 \, dx$$

$$= \int_A u D^\alpha \varphi_1 \, dx + \int_B u D^\alpha \varphi_2 \, dx = (-1)^{|\alpha|} \left\{ \int_A v \varphi_1 \, dx + \int_B w \varphi_2 \, dx \right\}$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \left\{ \int_{A \cup B} v \varphi_1 \, dx + \int_{A \cup B} w \varphi_2 \, dx \right\} = (-1)^{|\alpha|} \int_{A \cup B} D^\alpha u (\varphi_1 + \varphi_2) \, dx$$

Lemma Ogni $\varphi \in C_c^\infty(A \cup B)$ si può scrivere come $\varphi_1 + \varphi_2$ come sopra.

Dim (Rifare argomento delle partizioni dell'unità di tipo B)

Step 1 Poniamo $A_k := \{x \in A : B(x, \frac{1}{k}) \subseteq A\}$

$B_k := \{x \in B : B(x, \frac{1}{k}) \subseteq B\}$

Osserviamo che

$$\bigcup_{k \geq 1} (A_k \cup B_k) = A \cup B \quad (\text{unione crescente})$$

Essendo il supporto di φ compatto, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $\text{supp } \varphi \subseteq A_{k_0} \cup B_{k_0}$

Step 2 Sia $\theta_1 \in C_c^\infty(A)$ t.c. $\theta_1(x) = 1 \quad \forall x \in A_{k_0}$
 $0 \leq \theta_1(x) \leq 1 \quad \forall x \in A$
Sia $\theta_2 \in C_c^\infty(B)$ t.c. $\theta_2(x) = 1 \quad \forall x \in B_{k_0}$
 $0 \leq \theta_2(x) \leq 1 \quad \forall x \in B$

Possiamo pensare ψ_1 e ψ_2 come $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Poniamo ora

$$\psi_1(x) := \theta_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$\psi_2(x) := \theta_2(x)(1 - \theta_1(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

CLAIM: $\psi_1(x) + \psi_2(x) = 1$ per ogni $x \in A_{k_0} \cup B_{k_0}$.

Infatti $\psi_1(x) + \psi_2(x) = 1 \Leftrightarrow \theta_1(x) + \theta_2(x) - \theta_1(x)\theta_2(x) - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (1 - \theta_1(x))(\theta_2(x) - 1) = 0$

Ora su $A_{k_0} \cup B_{k_0}$ almeno uno dei 2 fattori si annulla.

Allora per ogni $x \in \text{supporto di } \varphi$ vale che

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x) \cdot 1 = \varphi(x) (\psi_1(x) + \psi_2(x)) \\ &= \underbrace{\varphi(x) \psi_1(x)}_{\substack{\varphi_1(x) \\ \in C_c^\infty(A)}} + \underbrace{\varphi(x) \psi_2(x)}_{\substack{\varphi_2(x) \\ \in C_c^\infty(B)}} \end{aligned}$$

Dim riincollamento in generale $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Ipotesi : $u_i = D^{\alpha} u$ in Ω_i

Tesi : le u_i si riincollano per definire una $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con
 $u(x) = u_i(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega_i$ e
 $u = D^{\alpha} u$ in Ω

Il fatto che si ricoliamo è conseguenza dello step 1.

Dallo Step 2 per involuzione segue che $D^\alpha u = v$ in ogni unione FINITA di Ω_i .

Per passare all'unione qualunque devo dire che

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

ma ogni φ di questo ha il supporto contenuto in una unione FINITA di Ω_i e quindi mi riduco al p.to precedente.

Compatibilità classica in $\mathbb{R}^2$ Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto.

Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo che u_x e u_y esistano in senso debole in Ω e siano funzioni CONTINUE.

Allora u è di classe C^1 e si tratta di derivate vere.

In dim. 1 si mostrava che u era una primitiva della derivata debole. Supponendo $\Omega = \mathbb{R}^2$, verrebbe da porre

$$U(x, y) = \int_0^x u_x(t, y) dt \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Questa definizione presenta un paio di problemi

- u_x è definita a meno di insiemi di misura NULLA in $\mathbb{R}^2$, quindi $u_x(t, y)$ potrebbe non essere definita per nessun $t \in \mathbb{R}$
- questa definizione assume che il segmento di estremi $(0, y)$ e (x, y) è tutto contenuto in Ω , il che in generale non sarà vero.

Supponendo anche di aver definito U , avremmo che

$$\int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) \varphi_x(x, y) = - \int_{\mathbb{R}^2} u_x(x, y) \varphi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) \varphi_x(x, y)$$

$\uparrow$ integr. per parti in x a y fissato $\uparrow$ defn. di u_x

Mettenolo insieme troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \{U(x,y) - u(x,y)\} \varphi_x(x,y) dx dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

e a questo punto servirebbe un DBR con le derivate parziali per dedurre che $U(x,y) - u(x,y)$ dipende solo dalla y . Insomma ... mille problemi.

Procediamo per convoluzione. Scegliamo tre aperti

$$\Omega'' \subset \subset \Omega' \subset \subset \Omega$$

Consideriamo $\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega' \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega' \end{cases}$

Poniamo $u_n(x) = \hat{u} * \rho_{1/n}$
 $\uparrow$ solito nucleo di convoluzione

Allora

$$u_n \rightarrow \hat{u} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^2)$$

e in particolare

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega'') \text{ e in } L^1(\Omega').$$

Inoltre

$$u_{nx} = u_x * \rho_{1/n} \quad \text{in } \Omega'' \text{ per } n \text{ grande}$$

$$u_{nx} \rightarrow u_x \quad \text{uniformemente in } \Omega''$$

$\uparrow$ poiché u_x è continua

$$u_{ny} \rightarrow u_y \quad \text{unif. in } \Omega''$$

Quindi u_{nx} e u_{ny} sono equilimitate, quindi le u_n sono equilipschitz e convergono puntualmente (a meno di s.succ.) in almeno un p.to di Ω'' .

A questo punto è il teo. di scambio delle derivate di Analisi 2.

Essendo Ω' e Ω'' arbitrari, è fatta.

— o — o —