

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 36

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

$H \neq W$ nel caso $p = +\infty$

Setting: $d \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque. Allora

$H^{1,\infty}(\Omega) =$ funzioni u di classe $C^1(\Omega)$ con u e ∇u limitati in Ω

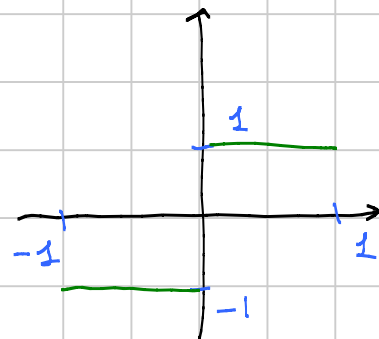
(Le derivate parziali esistono in senso classico e sono limitate in Ω)

$W^{1,\infty}(\Omega) =$ funzioni Lipschitziane in Ω detto così è falso

= funzioni in Ω che sono Lipschitziane con una costante comune in ogni palla contenuta in Ω .

Esempio Sia $\Omega = (-1,0) \cup (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ e sia

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-1,0) \\ +1 & \text{se } x \in (0,1) \end{cases}$$

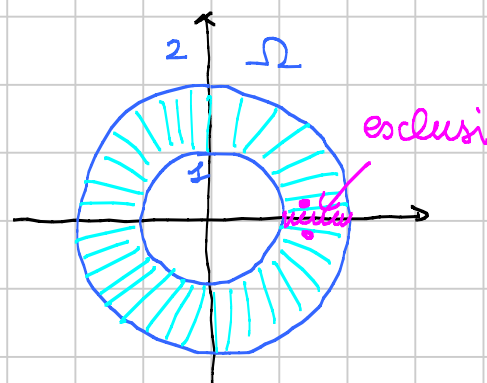


Si verifica che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ con $u' \equiv 0$

e u non è Lip. in Ω (si verifica prendendo due punti del tipo $x = -\frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{n}$, oppure in astratto osservando che se fosse Lip, allora sarebbe estendibile ad una funzione continua sulla chiusura).

Achtung! Non è nemmeno vero che $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u$ è Lipschitziana nelle componenti connesse di Ω , perché non è vero nemmeno se $u \in C^1(\Omega)$ con derivata limitata.

Esempio $\Omega =$ corona circolare in $\mathbb{R}^2$ - punti con $x > 0$ e $y = 0$
 $u(x, y) =$ il θ delle coordinate polari



Si verifica che u è di classe C^∞ in Ω
 con ∇u limitato, ma non è
 Lipschitziana (se lo fosse, sarebbe
 estendibile alla chiusura in modo continuo)

Dim. caratterizzazione di $H^{1,\infty}(\Omega)$

Sia quindi $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$. Per definizione esiste $\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega)$
 tale che $u_m \in L^\infty(\Omega)$ e $\nabla u_m \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e
 inoltre

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u && \text{in } L^\infty(\Omega) \\ \nabla u_m &\rightarrow \nabla u && \text{in } L^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Trattandosi di funzioni continue, la convergenza in $L^\infty(\Omega)$
 implica la convergenza uniforme, e quindi il risultato segue
 dai teoremi di scambio di Analisi 2.

Le limitatezza di u e ∇u seguono dalla limitatezza delle
 succ. approssimanti (le succ. convergenti sono limitate).

Dim. che $W^{1,\infty} \Rightarrow$ lip. sulle palle

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia $\bar{B}(x_0, r) \subseteq \Omega$ una palla chiusa
 contenuta, sia $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Allora u è lip. in $\bar{B}(x_0, r)$ e più precisamente

$$|u(y) - u(x)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} |y - x| \quad \forall (x, y) \in [\bar{B}(x_0, r)]^2$$

Dim Consideriamo le convoluzioni $u_\varepsilon := (u * \varphi_\varepsilon)$

Per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo sono ben definite in $\bar{B}(x_0, r)$

e inoltre

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla u * \rho_\varepsilon$$

(nel senso che vale componente per componente)

da cui

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall x \in \bar{B}(x_0, r)$$

Quindi a ε fissato le u_ε sono Lipschitziane e soddisfanno

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| &\leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\bar{B}(x_0, r))} |y - x| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} |y - x| \end{aligned} \quad (*)$$

per ogni x e y in $\bar{B}(x_0, r)$. Ora vorrei passare al limite. In che senso $u_\varepsilon \rightarrow u$? In generale questo è vero in tutti gli $L^p(B(x_0, r))$ con $p < +\infty$, ma non in L^∞ .

(vale più in generale che $u_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ se u_ε è stata definita come la convoluzione dell'estesa $\hat{u}$).

In realtà però posso applicare AA in $\bar{B}(x_0, r)$ poiché le u_ε sono equi-lip. ed equi-limitate (convoluzioni di una funzione L^∞). Ne segue che esiste $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$ t.c.

$$u_{\varepsilon_k}(x) \rightarrow v(x) \quad \text{unif. in } \bar{B}(x_0, r)$$

$\uparrow$ per forza sarà $u(x)$

A questo possiamo passare al limite nella (*) e ottenere la Lip. di u con la costante richiesta.

Oss. Questa in fondo è la dimostrazione del tes. di immersione nel caso $p = +\infty$ indipendentemente dalla regolarità di Ω (ma la tesi è solo "locale", cioè in ogni palla contenuta in Ω).

Domanda: dove fallisce la dim. di convergenza delle convulsioni
in nel caso $p = +\infty$?

Implicazione Restante Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
Supponiamo che esista $L \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $B(x_0, r) \subset \Omega$
vale la stima

$$|u(y) - u(x)| \leq L |y - x| \quad \forall (x, y) \in [B(x_0, r)]^2.$$

Allora ∇u esiste in senso W e soddisfa $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L.$$

Dim. Usiamo i rapporti incrementali. Fissiamo $B(x_0, r) \subset \Omega$,
e fissiamo $i \in \{1, \dots, d\}$. Allora per ogni R sufficientemente
piccolo il rapp. incrementale

$$\frac{u(x + Re_i) - u(x)}{R}$$

è ben definito per ogni $x \in B(x_0, r)$ e soddisfa la stima

$$\left| \frac{u(x + Re_i) - u(x)}{R} \right| \leq L \quad (\text{quindi sta in } L^\infty(B(x_0, r)) \text{ con cost. indep. da } R)$$

Ora per ogni $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0, r))$ vale una specie di integrazione
per parti discreta: (vedi les. su regole ellittiche)

$$\int_{B(x_0, r)} \frac{u(x + Re_i) - u(x)}{R} \varphi(x) dx = - \int_{B(x_0, r)} u(x) \frac{\varphi(x - Re_i) - \varphi(x)}{-R}$$

Noni passare al limite in questa uguaglianza.

Al RHS abbiamo che

$$\frac{\varphi(x - Re_i) - \varphi(x)}{-R} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \quad \text{unif. in } \bar{B}(x_0, r)$$

quindi

$$\text{RHS} \rightarrow - \int_{B(x_0, r)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

Al LHS i rapp. increment. sono una famiglia di funzioni limitate in $L^\infty(\Omega)$, quindi esiste $R_k \rightarrow 0$ t.c.

$$\frac{u(x + R_k e_i) - u(x)}{R_k} \xrightarrow{*} v(x) \quad \text{debole } * \text{ in } L^\infty(B(x_0, r))$$

(o si usa il fatto per ora misterioso in L^∞ , oppure si prende il limite debole in L^2 e si dimostra che sta in L^∞)

A questo punto

$$\text{LHS} \rightarrow \int_{B(x_0, r)} v(x) \varphi(x) dx.$$

Per definizione in questo ci dice che $v(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$.

In questo modo abbiamo anche dimostrato che

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq L.$$

Per concludere servirebbero 2 cose:

→ se $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ esiste in tutte le palle ed è in norma $\leq L$, allora vale lo stesso su tutto Ω . Queste sono le proprietà di riincollamento nei Sobolev (vedi les. successiva)

→ Tutto il gradiente ha norma $\leq L$. Per far questo occorre introdurre i "rapporti incrementali direzionali"

$$\frac{u(x + R w) - u(x)}{R} \quad \text{dove} \quad \|w\| = 1$$

Questi hanno norma $\leq L$ e tendono a $\langle \nabla u(x), w \rangle$.