

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 35

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Spazi di Sobolev in generale $W^{m,p}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

- Definizioni
- W, con le derivate deboli (scaricando)
- H mediante approx./completamento
- rapporti incrementali

L'approccio W è comodo quando si passa al limite

L'approccio H è comodo per dimostrare "formule"

I rapporti incrementali sono comodi

- per fare dei conti quando le derivate non ci sono ancora (vedi più avanti la regolarità ellittica)
- per definire gli spazi di Sobolev in ambienti "strani" ad esempio in spazi metrici (non lo vedremo mai)

Passaggio al limite Supponiamo $\{u_n\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$
 $\{v_n\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$

Supponiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $u_n = D^\alpha u_n$ per ogni n per un qualche multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty$$

$$U_n \rightarrow U_\infty$$

in qualche senso.

Vorrei tanto che $U_\infty = D^2 u_\infty$.

La definizione W torna comodissima! Per ipotesi

$$\int_{\Omega} u_m D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_m \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\Omega} u_\infty D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\infty \varphi \, dx$$

Quindi: per avere la tesi basta che $u_n \rightarrow u_\infty$ e $v_n \rightarrow v_\infty$ in un senso che permette di passare al limite negli integrali in cui ci si scontra con funzioni $C_c^\infty(\Omega)$.

Ad esempio basta e avanza la convergenza debole in $L^1(\Omega')$ per ogni aperto $\Omega' \subset \subset \Omega$, (In questo caso $D^i \varphi$ e φ sono chiaramente in $L^\infty(\Omega)$ e basta prendere $\Omega' \subset \subset \Omega$ che contenga il supporto di φ).

Oss. Chiedere che $\int_\Omega u_n \varphi dx \rightarrow \int_\Omega u_\infty \varphi dx$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

è molto più debole che chiedere la conv. debole in $L^1(\Omega')$ su ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$.

Morale: più rendo piccola la classe delle funzioni test, più diventa facile convergere, quindi si ottiene una nozione di convergenza sempre più debole.

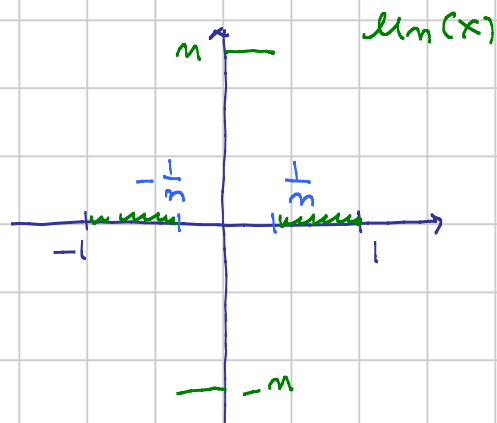
Esempio Trovare una successione $\{u_n\} \subseteq L^1((-1,1))$ tale che

$$\int_{-1}^1 u_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C^0((-1,1))$$

una $u_n(x)$ non converge debolmente a 0 in $L^1((-1,1))$, cioè in particolare la relazione di sopra non vale $\forall \varphi \in L^\infty((-1,1))$.

Definiamo

$$u_n(x) := \begin{cases} n & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ -n & \text{se } x \in (-\frac{1}{n}, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Osserviamo che $\{u_n\} \subseteq L^1((-1,1))$ e

$$\|u_n\|_{L^1} = 2 \quad \forall n \geq 1. \quad \text{Quindi potrebbero avere lim. debole}$$

Esiste $\varphi \in L^\infty((-1,1))$ t.c. $\int_{-1}^1 u_n \varphi \not\rightarrow 0$

Basta prendere $\varphi(x) = 1$ se $x > 0$ e $\varphi(x) = 0$ se $x < 0$
(l'integrale vale sempre 1).

CLAIM $\int_{-1}^1 u_n \varphi \rightarrow 0$ per ogni $\varphi \in C^0((-1,1))$, anzi basta
che φ sia continua in $x=0$.

$$\int_{-1}^1 u_n \varphi = \underbrace{n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx}_{\varphi(0)} - \underbrace{n \int_{-\frac{1}{n}}^0 \varphi(x) dx}_{\varphi(0)} = 0$$

Per giustificare il 1° limite basta usare il teo. della media int.

$$n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx = \varphi(x_n) \quad \text{per un qualche } x_n \in (0, \frac{1}{n})$$

Idem per il secondo.

— o — o —

L'integrazione per parti nella defn. W, fino a quali funzioni
test possiamo spingerla?

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad (*)$$

Se assumo che (*) sia vera $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, per quali altre
 φ sono sicuro che resta vera?

Tutte le volte che posso passare al limite. Ad esempio posso
arrivare fino a $C_o^{|\alpha|}(\Omega)$ e anche a tutte le φ che

$\rightarrow$ hanno supporto compatto in Ω $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega' \subset\subset \Omega$

$\rightarrow$ ammettono una derivata debole $D^\alpha \varphi$ in Ω'

Questo si dimostra ricorrendo alla def. H e W messe insieme.

Dalla definizione 1 per φ sappiamo che esistono $\{\varphi_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che

- $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in $L^1(\Omega')$
 - $D^\alpha \varphi_m \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $L^1(\Omega')$
- } basta fare per convoluzione

Ad n fissato vale la relazione

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi_m dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi_m dx$$

Passare al limite non è gratis. SERVE QUALCOSA DI PIÙ.

Serve un qualche equi-bound che fornisca una dominazione, dal momento che possiamo sempre supporre

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{e} \quad D^\alpha \varphi_m \rightarrow D^\alpha \varphi \quad \text{puntualmente q.o.}$$

e in maniera dominata.

In quali ipotesi abbiamo una dominazione dei prodotti?

Ad esempio in 2 casi

→ se u e v sono pure in L^∞ (la dominazione per φ_m e per $D^\alpha \varphi_m$ diventa una dom. per $u D^\alpha \varphi_m$ e $v \varphi_m$)

→ se φ_m e $D^\alpha \varphi_m$ sono equilimitate, cosa che è vera ad esempio se φ e $D^\alpha \varphi$ sono continue a supp. cpt. (in questo caso i prodotti sono dominati da u e v per costante).

Achtung! Quando in dimensione $d \geq 2$ si ha a che fare con prodotti di funzioni di Sobolev, serve sempre qualche ipotesi per poter integrare il prodotto.

Achtung! Abbiamo già visto in dim 1 che non è possibile restringere la (*) a classi di funzioni + piccole di C_c^∞ , pena definire un altro oggetto.

— o — o —

La def. (H) ha due varianti

→ mediante approx.

→ mediante completamento astratto

La stessa cosa vale anche in un intervallo

Def. H1 Si dice che $u \in H^{1,p}((a,b))$ se $\exists \{u_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ t.c.

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \\ u_n' &\rightarrow u' \end{aligned} \quad \text{in } L^p((a,b))$$

Def. H2 $H^{1,p}((a,b)) =$ completamento astratto di $C_c^\infty((a,b))$ rispetto alla distanza indotta dalla norma

$$\|u\|_{1,p,(a,b)} = \|u\|_{L^p((a,b))} + \|u'\|_{L^p((a,b))}$$

Perché sono equivalenti? Sostanzialmente per le proprietà astratte del completamento di uno spazio metrico.

Chiamiamo $H^{1,p}((a,b))$ quello definito nel 1° modo. Per dimostrare che è il complet. astratto, basta trovare un'applic.

$$i: C_c^\infty((a,b)) \rightarrow H^{1,p}((a,b))$$

che sia una isometria e abbia immagine densa, ed entrambe le proprietà sono praticamente ovvie.

Teoria generale (vedi lez. di Analisi 2). Se voglio dim. che uno sp. metrico $\mathcal{Y}$ è IL completamento di uno sp. metrico $\mathcal{X}$ devo

↑ *unico a meno di isomorfismi in un opportuno senso*

• dimostrare che $\mathcal{Y}$ è completo

• trovare una isometria $i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ che abbia immagine densa

Nel vostro caso si tratta solo di verificare che $H^{1,p}((a,b))$ è chiuso come sottoinsieme di $L^p((a,b))$ e di conseguenza completo.