

# Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 34

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

**Esempio 1** Determinare per quali esponenti  $p$  e  $q$  vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(x,y) \cdot b(x) dx dy \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \cdot \|b\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

per ogni  $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  e ogni  $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  (ma basta molto meno)

Oss 1: come sempre suppongo wlog  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$

**Argomento di riscalamiento** Se vale per le funzioni  $a(x,y)$  e  $b(x)$ , allora vale anche per le funzioni

$$\hat{a}(x,y) = a(\lambda x, y)$$

$$\hat{b}(x) = b(\lambda x)$$

qualunque sia il valore  $\lambda > 0$ . Vediamo come si comportano LHS e RHS.

$$\text{LHS} = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}(x,y) \hat{b}(x) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} a(\lambda x, y) b(\lambda x) dx dy$$

$$\lambda x = z \rightsquigarrow dx = \frac{1}{\lambda} dz \quad = \frac{1}{\lambda} \iint_{\mathbb{R}^2} a(z, y) b(z) dz dy$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}(x,y)^p dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} a(\lambda x, y)^p dx dy = \frac{1}{\lambda} \iint_{\mathbb{R}^2} a(z, y)^p dz dy$$

$$\text{e quindi} \quad \|\hat{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

$$\text{In maniera del tutto analoga} \quad \|\hat{b}\|_{L^q(\mathbb{R})} = \frac{1}{\lambda^{1/q}} \|b\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

$$\hat{\text{LHS}} \leq \hat{\text{RHS}}, \text{ cioè } \frac{1}{\lambda} \text{LHS} \leq \frac{1}{\lambda^{1/p+1/q}} \text{RHS}$$

quindi deve essere  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (se è  $>$  oppure  $<$  le cose vanno male per  $\lambda \rightarrow +\infty$  o per  $\lambda \rightarrow 0^+$ )

Analogamente posso riscalarne in  $y$ , ponendo

$$\tilde{a}(x, y) := a(x, \lambda y)$$

$$\tilde{b}(x) = b(x)$$

$\uparrow$  resta lo stesso

Allo stesso modo troviamo

$$\tilde{LHS} = \frac{1}{\lambda} LHS, \quad \tilde{RHS} = \frac{1}{\lambda^p} RHS$$

Da questa deduciamo  $p=1$  e quindi  $q=+\infty$ , nel qual caso la disug. è ovviamente banale.

Esempio 2 Come prima con

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x, y, z) b(x, y) c(y, z) dx dy dz \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \|c\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}$$

Vediamo come riscalarlo LHS e RHS

- Cambio  $x$  con  $\lambda x$  :  $\hat{LHS} = \frac{1}{\lambda} LHS$

$$\|\hat{b}\|_{L^q} = \frac{1}{\lambda^{1/q}} \|b\|_{L^q}, \quad \|\hat{a}\|_{L^p} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \|a\|_{L^p} \quad \|\hat{c}\|_{L^2} = \|c\|_{L^2}$$

Mettenendo insieme

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

- Cambio  $y$  con  $\lambda y$  :  $\hat{LHS} = \frac{1}{\lambda} LHS$ , mentre al RHS riscalaro i 3 termini come  $1/p, 1/q, 1/r$ .

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad \leadsto r = +\infty$$

- Cambio  $z$  in  $\lambda z$  :  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \quad \leadsto p=1, q=+\infty$

Ancora una volta la disug. è banale per  $p=1, q=+\infty, r=+\infty$ .

— 0 — 0 —

Oss. Stiamo anche dim. che per altri valori dei parametri la disug. è falsa. Basta prendere 3 funzioni  $a, b, c$  fisse e  $\neq 0$ , e poi riscalarle opportunamente.

Esempio 3 Come prima per

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x,y) b(y,z) c(x) dx dy dz \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \|c\|_{L^r(\mathbb{R})}$$

•  $x \rightsquigarrow \lambda x$  :  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/r}}$

$$\boxed{1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}}$$

•  $y \rightsquigarrow \lambda y$  :  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/q}}$

$$\boxed{1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

•  $z \rightsquigarrow \lambda z$  :  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1/q}}$

$$\boxed{1 = \frac{1}{q}}$$

L'unica possibilità è  $q=1, p=\infty, r=1$ .

Vediamo se è vera in questo caso:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} a(x,y) b(y,z) c(x) dx dy dz &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^3} b(y,z) c(x) dx dy dz \\ &= \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} b(y,z) dz \cdot \int_{\mathbb{R}} c(x) dx \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio 4 Come sempre con

$$\int_{\mathbb{R}^4} a(x,y) b(y,z) c(z,w) d(w,x) dx dy dz dw \leq \underbrace{\|a\|_p \cdot \|b\|_q \cdot \|c\|_r \cdot \|d\|_s}_{\text{tutte norme in } \mathbb{R}^2}$$

$x \rightarrow \lambda x$  :  $\boxed{1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{s}}$

$y \rightarrow \lambda y$  :  $\boxed{1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$

$z \rightarrow \lambda z$  :  $\boxed{1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}}$

$w \rightarrow \lambda w$  :  $\boxed{1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}}$

L'unica soluzione dovrebbe essere  $p=q=r=s=2$ .

[Dopo video: NO, esistono infinite soluzioni. Basta che sia  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, r=p, s=q$ .  
Questi casi vanno tutti bene, con la stessa dim. della pagina successiva]

Resta da dimostrarla in questo caso

$$\int_{\mathbb{R}^4} \underbrace{a(x,y) c(z,w)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{b(y,z) d(w,x)}_{\frac{1}{2}} dx dy dz dw$$
$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} a^2 c^2 \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} b^2 d^2 \right\}^{1/2}$$

Ora basta osservare che

$$\int_{\mathbb{R}^4} a(x,y)^2 c(z,w)^2 dx dy dz dw =$$
$$= \left( \int_{\mathbb{R}^2} a(x,y)^2 dx dy \right) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}^2} c(z,w)^2 dz dw \right)$$

Esempio 5 Come sempre con

$$\int_{\mathbb{R}^4} a(x,y) b(x,z) c(x,w) d(y,z) e(y,w) f(z,w) dx dy dz dw$$
$$\leq \underbrace{\|a\| \|b\| \|c\| \|d\| \|e\| \|f\|}_{\text{norme in opportuni spazi } L^p(\mathbb{R}^2)}$$

Al solito cerco di indovinare gli esponenti riscalandolo

•  $x \rightarrow \lambda x$  :  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$  p, q, r sono gli esponenti nelle norme di a, b, c

Utilizzando y, z, w troviamo altre 3 relazioni, ma abbiamo 6 incognite, dunque servono altre relazioni !!

Idea: fare riscalamento su più di una variabile!

$x \rightarrow \lambda x$  e  $y \rightarrow \lambda y$ , cioè considero  $\hat{a}(x,y) = a(\lambda x, \lambda y)$   
 $\hat{b}(x,z) = b(\lambda x, z)$   
e così via.

Cambiando variabili negli integrali

$$\hat{LHS} = \frac{1}{\lambda^2} LHS$$

$$\|\hat{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{2/p}} \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

$$\|\hat{b}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{2/q}} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

(analogo per c, d, e)

$$\|\hat{f}\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{2/r'}} \|f\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^2)}$$

$\uparrow$   
inalterata

Da qui si ottiene

$$\boxed{2 = \frac{2}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t}} \quad \text{e altre 5}$$

relazioni analoghe. Alla fine tutti gli esponenti sono = 3.

Resta da dimostrare che in questo caso funziona:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \underbrace{a(x,y)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{f(z,w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{b(x,z)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{e(y,w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{c(x,w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{d(y,z)}_{\frac{1}{3}} dx dy dz dw$$

$$\leq \|a f\|_{L^3(\mathbb{R}^4)} \cdot \|b e\|_{L^3(\mathbb{R}^4)} \|c d\|_{L^3(\mathbb{R}^4)}$$

e concludiamo osservando che

$$\begin{aligned} \|a f\|_{L^3(\mathbb{R}^4)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} a(x,y)^3 f(z,w)^3 dx dy dz dw \right\}^{1/3} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(x,y)^3 dx dy \cdot \int_{\mathbb{R}^2} f(z,w)^3 dz dw \right\}^{1/3} \\ &= \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} \cdot \|f\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

e idem per le altre due norme.

Oss. Quelli che abbiamo fatto sono riscalamenti "interni" o, in termini di grafico, ORIZZONTALI.

Con riscalamenti verticali si possono contraddire disuguaglianze che non hanno la giusta omogeneità

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(x,y)^2 b(y,z)^3 c(z,x)^4 dx dy dz \leq \|a\|_{L^p}^\alpha \|b\|_{L^q}^\beta \|c\|_{L^r}^\gamma$$

Per quali  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $p, q, r$  è vera?

Se cambio  $a(x,y)$  con  $\lambda a(x,y)$  vediamo che

$$\hat{LHS} = \lambda^2 LHS \quad \hat{RHS} = \lambda^\alpha RHS \quad \leadsto \alpha = 2$$

e analogamente  $\beta = 3$  e  $\gamma = 4$ .

Poi con i riscalamenti orizzontali trovo  $p, q, r$ .

— o — o —