

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 33

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Variations sulle disuguaglianze alla Brascamp-Lieb

Dati un intero $d \geq 2$, date d funzioni $\varphi_i \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$.

Consideriamo le proiezioni $P_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ che dimenticano la i -esima componente. Poniamo

$$\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(P_i x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Allora vale

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (\text{GAGLIARDO} \sim 1959)$$

Esercizio 1 Nel caso $d=2$, capire quando si ha uguaglianza

In questo caso abbiamo $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$ e la disug. diventa

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x,y)| dx dy \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy$$

Questa è una banalità grazie a Fubini-Tonelli (formula di riduzione per integrali doppi):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x,y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| \cdot |g(y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \end{aligned}$$

Quindi vale il segno di = in ogni caso.

Esercizio 2 Fare dimostrazione nel caso $d=3$ e capire qualcosa sui casi di uguaglianza

In questo caso $\varphi(x, y, z) = a(y, z) \cdot b(x, z) \cdot c(x, y)$ e voglio dim. che

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x, y, z)| dx dy dz \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dx dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} c(x, y)^2 dx dy \right\}^{1/2}$$

Dim. 1 **Tecnica $3=2+1$** Osserviamo che wlog possiamo assumere $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}^3} a(y, z) \cdot b(x, z) \cdot c(x, y) dx dy dz$$

$$\overset{3=2+1}{=} \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z) \cdot b(x, z) dz \right\} dx dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{c(x, y)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dz \right\}^{1/2}}_{\frac{1}{2} \text{ (pensata come funzione di } x \text{ e } y)} dx dy$$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y)^2 dx dy \right\}^{1/2}}_{\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dz \right) dx dy \right\}^{1/2}}_{\substack{g(y) \quad f(x)}}$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dz \cdot \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dz \right\}^{1/2}$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y, z)^2 dx dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} b(x, z)^2 dx dz \right\}^{1/2}$$

$$\|a\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \|b\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Dim 2

Tecnica 3 = 1+2

Notazioni come prima

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(y,z) b(x,z) c(x,y) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{a(y,z) b(x,z)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{c(x,y)}_{\frac{1}{2}} dx dy \right\} dz$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y,z)^2 b(x,z)^2 dx dy \right\}^{1/2} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} c(x,y)^2 dx dy \right\}^{1/2}}_{\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \text{ ed esce fuori dall'integrale}} dz$$

$$= \|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y,z)^2 b(x,z)^2 dx dy \right\}^{1/2} dz$$

Fissato z , è l'integrale in $\mathbb{R}^2$ del prodotto di una $g(y)$ per una $f(x)$, quindi per la solita formula

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy \cdot \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx \right\}^{1/2} dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx \right\}^{1/2} dz$$

$$= \|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy \right\}^{1/2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx \right\}^{1/2}}_{\frac{1}{2}} dz$$

$$\leq \|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy dz \right\}^{1/2}}_{\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx dz \right\}^{1/2}}_{\|b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}$$

Oss. Entrambe le dimostrazioni coinvolgono 2 disug. di Hölder con esponenti $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Per capire i casi di uguaglianza, ricordiamo che in Hölder vale il segno di $=$ se e solo se le funzioni sono una moltiplica dell'altra (per una costante numerica).

Esaminiamo la 1ª dimostrazione. Il 1º Hölder era

$$\int_{\mathbb{R}} a(y,z) b(x,z) dz \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dz \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dz \right\}^{1/2}$$

Se vogliamo che per ogni x e y valga il seguito di = ci serve che

$$a(y,z) = \text{costante } b(x,z)$$

↑ può dipendere da x e y .

Brutal mode: supponendo di poter dividere, questo si traduce in

$$\frac{a(y,z)}{b(x,z)} \text{ dipende solo da } x \text{ e } y \text{ (cioè non dipende da } z \text{!)}$$

Visto che potevo fare il $z+1$ con ogni variabile nel $+1$, questo vuol dire che

$$\frac{b(x,z)}{c(x,y)} \text{ non dipende da } x, \quad \frac{c(x,y)}{a(y,z)} \text{ non dipende da } y$$

Una possibilità è che esistano 3 funzioni $f(x), g(y), R(z)$ tali che

$$a(y,z) = g(y) R(z)$$

$$b(x,z) = f(x) R(z)$$

$$c(x,y) = f(x) g(y)$$

Osserviamo che se a, b, c sono come sopra, allora vale il seguito di = uella Gagliardo

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(y,z) b(x,z) c(x,y) dx dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)^2 g(y)^2 R(z)^2 dx dy dz$$

$$= \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y)^2 dy \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} R(z)^2 dz \right\} = \text{LHS}$$

Vediamo come sono fatti i 3 termini al RHS della Gagliardo

$$\begin{aligned} \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y,z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} g(y)^2 R(z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y)^2 dy \cdot \int_{\mathbb{R}} R(z)^2 dz \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} R(z) dz \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Poiché lo stesso vale per le altre variabili, moltiplicando si ottiene $RHS = LHS$, dunque c'è sempre uguaglianza.

Ci sono altre possibilità? Chi sono moralmente f, g, R ?
Cioè: date a, b, c , come determino f, g, R , posto che esistano?
Osservo che deve essere

$$f(x)^2 = \frac{b(x,z) \cdot c(x,y)}{a(y,z)}$$

Siamo sicuri che dipenda solo da x ? Se valgono i seguenti nelle Hölder

$$\begin{aligned} \frac{b(x,z) \cdot c(x,y)}{a(y,z)} &= \boxed{b(x,z)} \cdot \boxed{\frac{c(x,y)}{a(y,z)}} && \text{non dipende da } y \\ &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{non dipende da } y && \text{non dipende da } z \\ &= \boxed{c(x,y)} \cdot \boxed{\frac{b(x,z)}{a(y,z)}} && \text{non dipende da } z \\ &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ &\quad \text{non dipende da } z && \text{non dipende da } y \end{aligned}$$

Quindi se valgono gli in Hölder, possiamo definire f, g , ed R con le proprietà volute.

$$f(x)^2 = \frac{bc}{a}$$

$$g^2 = \frac{ca}{b}$$

$$R^2 = \frac{ab}{c}$$

Queste funzionano perché

$$a^2 = \frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c} = g^2 R^2$$

e analogamente per le altre.

Esercizio Rendere rigoroso il discorso cercando di non dividere, o per lo meno dividendo solo quando i denominatori sono diversi da 0.

— 0 — 0 —