

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 32

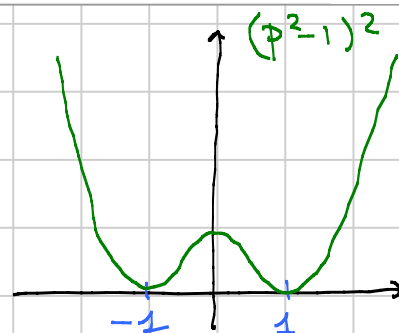
Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $F(u) := \int_0^1 (\dot{u}^2 - 1)^2 dx$

Il doppio pozzo ha CRESCITA una non CONVESSITÀ.



→ $\min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = 2 \}$

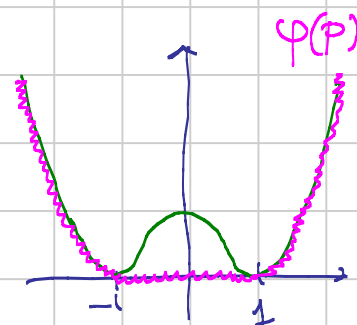
Osserviamo che la retta $u_0(x) = 2x$ risolve ELE

$$(2(\dot{u}^2 - 1)2\dot{u})' = 0 \quad (\dot{u}^3 - \dot{u})' = 0 \quad 3\dot{u}^2\ddot{u} - \ddot{u} = 0$$

CLAIM La retta $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.
Si dimostra introducendo

$$G(u) := \int_0^1 \varphi(\dot{u}) dx$$

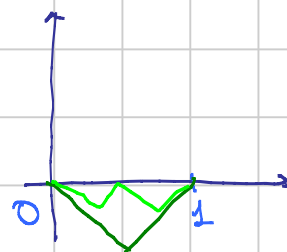
dove φ "convensifica" il doppio pozzo.
L'argomento è il solito.



→ $\min \{ F(u) : u(0) = u(1) = 0 \}$

CLAIM La retta $u_0(x) \equiv 0$ risolve ELE, ma non è il p.to di minimo. Infatti $\inf = 0$, il min N.E. in C^1 , ma esiste negli spazi di Sobolev (ad esempio in H^1 o anche in $W^{1,\infty}$) ed è realizzato ad esempio (ma non solo) da $u(x) = |x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}$ (ha sempre derivata ± 1)

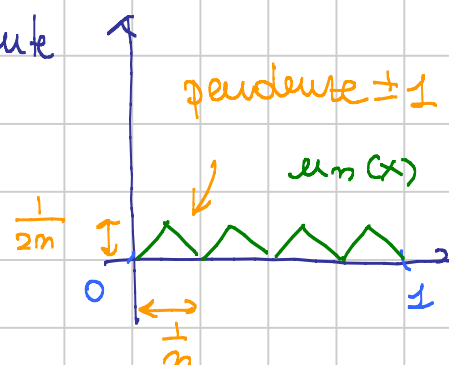
Esistono anche p.ti di min più creativi, con più "angoli".



→ $\min \{ F(u) + \int_0^1 u^2 \text{ senza altre condizioni} \}$

Idea: u vorrebbe essere circa $=0$, e avere derivata ± 1 .
Niente di più facile ☺

CLAIM $\inf = 0$. Una successione infittante si ottiene "infittendo la seghettina triangolare" come in figura



Nota bene: in questo esempio

$u_m(x) \rightarrow 0$ uniform.

$\dot{u}_m(x) \rightarrow 0$ debole L^2 e non solo (e anche in tutti i possibili sensi deboli)

Se applico il metodo diretto

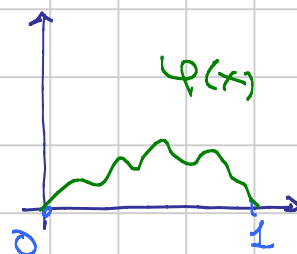
→ tutto OK in fase di compattezza (la crescita di $(\phi^2_{-1})^2$ mi garantisce $F(u_m) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_m\|_{L^4} \leq M'$
↑ anche L^2

e una DBC basta per rintracciare AA)

→ grossi problemi di SCI per colpa della mancanza di convessità.
(mancava anche nel primo scenario, e questo non impedisce al min. di esistere)

Esempio 2 $F(u) = \int_0^1 \{ \dot{u}^2 + u^3 \} dx$

→ $\min \{ F(u) : u(0) = u(1) = 0 \}$



Banale $\inf = -\infty$. Prendo una qualunque $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$ e pongo $u_m(x) := -m \varphi(x)$

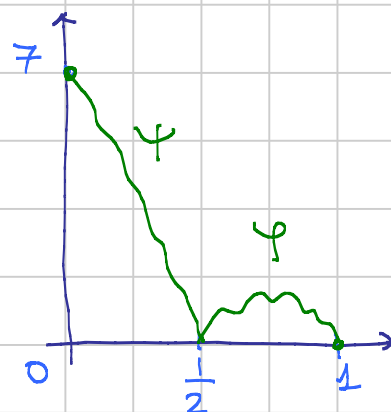
$$F(u_m) = m^2 \int_0^1 \dot{\varphi}^2 - \underbrace{(m^3)}_{\text{comanda}} \int_0^1 \varphi^3 dx \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 7, u(1) = 0 \}$$

Anche in questo caso $\inf = -\infty$, sempre per colpa del cubo che batte il quadrato.

Scegliamo $\psi: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ qualunque con $\psi(0) = 7$ e $\psi(\frac{1}{2}) = 0$.

Scegliamo $\varphi: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi(x) > 0$ in $(\frac{1}{2}, 1)$.



Poniamo

$$u_n(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -n\varphi(x) & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Questa è un competitor ammissibile (in H^1 , ma scegliendo bene ψ e φ pure in C^∞) e vale

$$F(u_n) = \int_0^1 \{ \dot{\psi}^2 - \psi^3 \} dx + n^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \dot{\varphi}^2 dx - \underbrace{n^3 \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi^3 dx}_{\text{dominante}} \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 7, \underbrace{\int_0^1 u^4 \leq 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{impedisce a } \int_0^1 u^3 \text{ di diventare} \\ \text{troppo negativo}}} \}$$

impedisce a $\int_0^1 u^3$ di diventare troppo negativo

$$\left| \int_0^1 u^3 \right| \leq \int_0^1 |u|^3 \leq \left\{ \int_0^1 u^4 \right\}^{3/4}$$

↑
Hölder con 4 nascosto

CLAIM Il minimo esiste, e tutti i pti di min. sono di classe C^∞ .

La dimostrazione si fa con il metodo diretto

→ Formulazione debole in $H^1(0,1)$ con DBC e $\int_0^1 u^4 \leq 1$

→ Compattezza : da $F(u_n) \leq M$ deduciamo che

$$M \geq F(u_n) = \int_0^1 \dot{u}_n^2 + \int_0^1 u_n^3 \\ \geq \int_0^1 \dot{u}_n^2 - \int_0^1 |u_n|^3$$

Hölder di prima $\rightarrow \geq \int_0^1 \dot{u}_n^2 - \left\{ \int_0^1 u_n^4 \right\}^{3/4}$

vincolo integrale $\rightarrow \geq \int_0^1 \dot{u}_n^2 - 1$

$$\leadsto \int_0^1 \dot{u}_n^2 dx \leq M+1 \text{ e a meno di s.succ. } \dot{u}_n \rightarrow \infty$$

Usando ora o la DBC o il teorema della media integrale con il vincolo $\int_0^1 u_n^4 \leq 1$ deduciamo che $|u_n(x)| \leq M'$ per ogni n e ogni $x \in [0,1]$

il che riassume A.A.

Quindi a meno di s.succ.

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif. e } \dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ debde } L^2$$

Ora basta osservare che DBC e vincolo integrale passano al limite.

→ SCI è completamente standard.

→ Regolarità : standard per i p.ti di min $u_0(x)$ che verificano

$$\int_0^1 u_0(x)^4 < 1$$

$\uparrow$ stretto

$F(u_0 + t v)$ verifica la stessa cond. per t piccolo e vado avanti

Se invece $\int_0^1 u_0(x)^4 = 1$ (cioè moralmente sono "sul bordo" dell'insieme di definizione)

non funziona più quanto detto sopra, perché $u_0 + t v$ potrebbe non essere un competitor ammissibile per $t \neq 0$.

Bordo = moltiplicatori di Lagrange (con vincolo $G(u) = \int_0^1 u^4$)

Dalla teoria sappiamo che, sotto opportune ipotesi di regolarità (qui banali perché Lagrangiane sono regolari) ci sono due scenari

1° $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni v ammissibile (basta C_c^∞)

$\leadsto 0 = 3u^3$ (ELE di G) $\leadsto u \equiv 0$ e non soddisfa il vincolo.
 $(L_p)' = L_s$

2° Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v)$ per ogni v ...
o equivalentemente $\delta(F - \lambda G)(u_0, v) = 0$.

Con i soliti conti si arriva prima a

$$\int_0^1 (2 \dot{u}_0 \dot{v} + 3 u_0^2 v) = \lambda \int_0^1 4 u_0^3 v$$

e questo per definizione di derivata debole equivale a

$$(2 \dot{u}_0)' = -3 u_0^2 + 4 \lambda u_0^3$$

e da qui è bootstrap fino a C^∞ (dopo aver usato la compatibilità classica.

— o — o —