

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 31

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

RUOLO DELLA CONVESSITÀ in P

Esempio 1

$$F(u) := \int_0^1 \{ u^2 + \arctan(u^2) \} dx$$
$$G(u) := \int_0^1 \{ u^2 - \arctan(u^2) \} dx$$

→ minimizzare senza ulteriori condizioni

Banale per $F(u)$: il min = 0 e p.to di min. $u(x) \equiv 0$.

Banale per $G(u)$: min N.E. e $\inf = -\frac{\pi}{2}$ con possibile succ. infiziente $u_n(x) \equiv n$

Se applicavamo il metodo diretto: con $F(u)$ funzionava bene, con $G(u)$ da $G(u_n) \leq M$ ottenevamo $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$ (qui serve $L(x,s,\varphi) \geq \varphi^2 - \frac{\pi}{2}$). L'assenza di DBC non ci permetteva di avere $\|u_n\|_{L^\infty}$ che serve per immersione A.A.

→ minimizzare con DBC $u(0)=7$.

In entrambi i casi il minimo esiste per il metodo diretto.

Esempio 2

$$F(u) = \int_0^1 \{ \arctan(u^2) + u^2 \} dx$$
$$G(u) = \int_0^1 \{ \arctan(u^2) - u^2 \} dx$$

→ minimizzare senza altre condizioni

Banale per F : $u(x) \equiv 0$ è l'unico p.to di min.

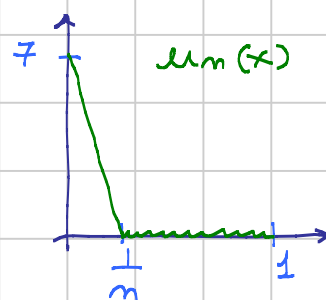
Banale per G : $\inf = -\infty$ con succ. infiz. $u_n(x) \equiv n$.

(Domanda: dove si pianta il metodo diretto?)

→ minimizzare con DBC $u(0) = 7$

Banale per G_1 : $\inf = -\infty$ con succ. $\inf$. $u_n(x) = 7 + nx$

Nel caso di F abbiamo $\inf = 0$ (meno non si può di certo) con succ. $\inf$ come in figura (o volendo anche più regolare)



Idea: la derivata è enorme in un intervallo piccolo, ma l'arctan lei fa pagare molto poco.

Oss. lo stesso fenomeno valeva per $\hat{F}(u) := \int_0^1 |\dot{u}|^{1/2} + u^2$
(La Lagrangiana ha problemi di CRESCITA e di CONVESSITÀ)

La CRESCITA la usiamo sempre per avere compattezza.

La CONVESSITÀ di $L(x, s, p)$ in p per avere SCI.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \{ \arctan(\dot{u}^2) + (u-x)^2 \} dx : u \in C^1([0,1]) \right\}$

Analisi brutale: $u(x)$ vorrebbe essere circa x e avere derivata ~ 0 .
Detta così sembra impossibile, ma la mancata convessità lo rende possibile !!!

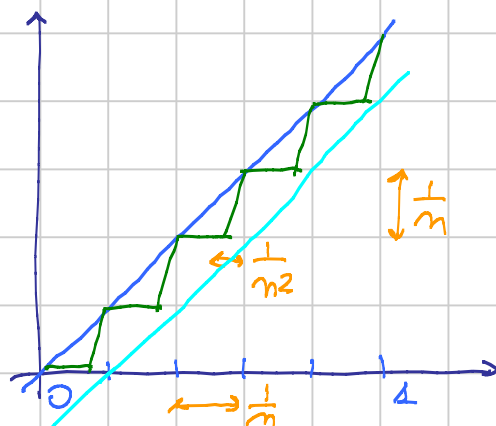
CLAIM $\inf = 0$. Di meno non può essere, quindi basta trovare una succ. $\inf$.

L'idea che ci sta sotto è quella della **DOPPIA SCALA**

Vogliamo delle $u_n(x)$ che siano circa x e con la derivata un po' 0 e un po' molto grande.

Salii su scala $\frac{1}{n}$

Salite su scala $\frac{1}{n^2}$



L'espressione di $u_n(x)$ in ogni singolo tratto si può scrivere esplicitamente, ma i pti essenziali sono che

- $x - \frac{1}{n} \leq u_n(x) \leq x$ per ogni $x \in [0, 1]$
- $\dot{u}_n(x) = n$ in n tratti, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{n^2}$
- $\dot{u}_n(x) = 0$ altrimenti.

Di conseguenza

$$\int_0^1 \arctan(\dot{u}^2) dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{numero tratti}}}{n} \cdot \overset{\substack{\uparrow \\ \text{lungh. singolo tratto}}}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 0$$

$\downarrow$
stima banale
per $\arctan$

$$\int_0^1 (u-x)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{n}\right)^2 dx \rightarrow 0$$

Quindi $u_n(x)$ è infiggente.

Brutalmente: visto che $\arctan$ è non convessa, se voglio salire di un qualunque tratto mi conviene stare praticamente sempre fermo, e poi salire tutto in un colpo in un intervallo piccolissimo.

Esempio 4 $F(u) := \int_0^1 \dot{u}(x)^3 dx$

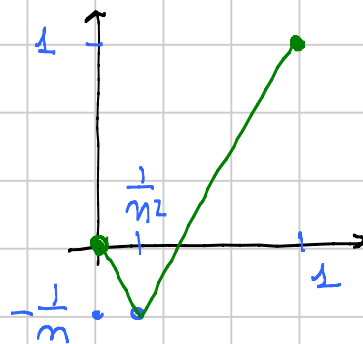
$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = 1 \}$$

Se scrivo ELE trovo $(3\dot{u}^2)' = 0$, cioè $6\dot{u}\ddot{u} = 0$, e posso notare che $u(x) = x$ è una soluzione di ELE.

Tuttavia, $\min$ N.E. e $\inf = -\infty$.

Se voglio andare a $-\infty$ devo scendere e poi risalire. Però salendo pago.

Idea: scendere brutalmente e poi salire dolcemente!



In un tratto lungo $\frac{1}{n^2}$ la derivata è $-n$.

In un tratto lungo $(1 - \frac{1}{n^2})$ la derivata è $\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}$

Facendo il conto otteniamo

$$\underbrace{\frac{1}{n^2} (-n^3)}_{-n} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}\right)^3}_{\sim 1} \rightarrow -\infty$$

In questa costruzione, siamo stati arbitrariamente vicini a $u(x) = x$, anzi la $u_n(x)$ sufficiente tende uniform. a x !!!
(Il problema è che le derivate non hanno limite in sensi che permettano di passare al limite nel funzionale)

Domanda: esistono dei p per cui $u_n(x)$ ammette limite debole in $L^p((0,1))$?

$\rightarrow \min \{F(u) : u(0) = 0, u(1) = 1, u(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in [0,1]\}$
 $\uparrow$ elimina la costruzione prec.

CLAIM In questo caso il minimo esiste e la retta $u(x) = x$ è l'unico pto di minimo.

La dimostrazione si fa considerando il funzionale ausiliario

$$G(u) := \int_0^1 |u'|^3 dx$$

Detta $u_0(x) = x$ la retta, per ogni competitor u vale che

$$F(u) \geq G(u) \geq G(u_0) = F(u_0)$$

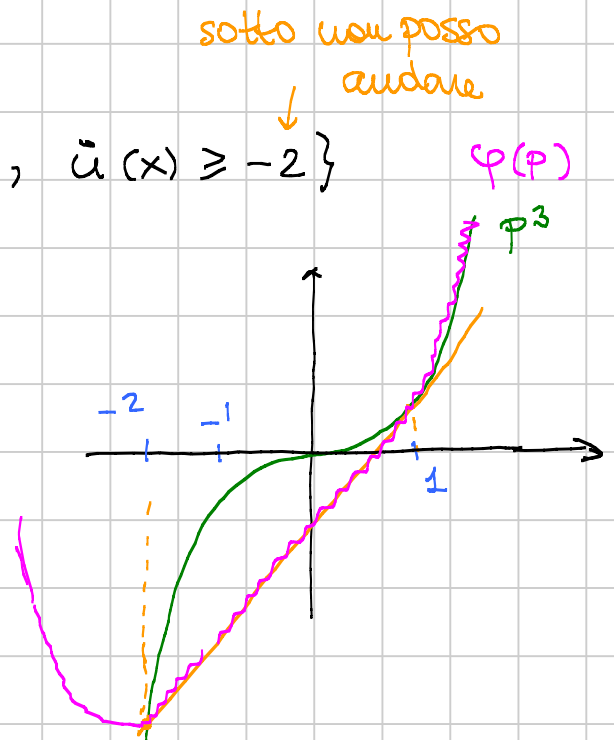
$\nearrow$ vale con = perché ci siamo ristretti alle $\tilde{u} \geq 0$
 $\uparrow$ la retta è p.to di minimo per $G(u)$ essendo soluzione di ELE + convessità della Lagrangiana
 $\nwarrow$ $|u_0| = u_0$ per la retta

Fino a dove posso spingermi?

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0)=0, u(1)=1, \tilde{u}(x) \geq -2 \}$$

CLAIM La retta è l'unico p.to di minimo!

Fatto importante: la tangente in $p=1$ a p^3 , cioè $3p-2$, incontra nuovamente p^3 in $p=-2$



Considero una funzione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa tale che

$$\varphi(p) = p^3 \text{ per } p \geq 1$$

$$\varphi(p) = 3p-2 \text{ per } p \in [-2, 1]$$

Poniamo

$$G(u) := \int_0^1 \varphi(\tilde{u}) dx$$

e vediamo che come prima

$$F(u) \geq G(u) \geq G(u_0) = F(u_0)$$

$\nwarrow$ $p^3 \geq \varphi(p)$ per ogni $p \geq -2$
 $\uparrow$ convessità di φ + ELE risolta
 $\nwarrow$ $p^3 = \varphi(p)$ quando $p=1$