

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 30

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio 1 Chiamiamo cono convesso un sottoinsieme $K \subseteq H$ (supponiamo H sp. di Hilbert, ma la definizione si può dare in un qualunque sp. vett. V) con la proprietà che

$$\forall v \in K \quad \forall w \in K \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad \lambda v + \mu w \in K$$

(non chiedo $\lambda + \mu = 1$)

Supponiamo che K sia chiuso.

Allora $\forall v \in H$ esiste $P_K v$ ed è caratterizzato dalle seguenti due proprietà

(i) $\langle v - P_K v, P_K v \rangle = 0$

(ii) $\langle v - P_K v, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$

Dalla figura sembrano ragionevoli

$P_K(v)$ verifica (i) e (ii)

Dalla teoria generale sappiamo che

$$\langle v - P_K v, w - P_K v \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$

Ponendo $w = 0$ (e posso) ottengo $\langle v - P_K v, P_K v \rangle \geq 0$

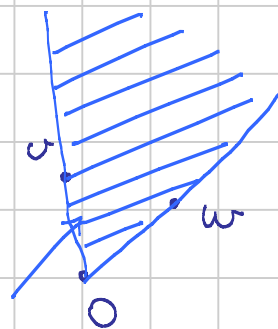
Ponendo $w = 2P_K v$ (e posso) ottengo $\langle v - P_K v, P_K v \rangle \leq 0$

Questo dimostra la (i). A questo p.to la (ii) è un corollario.

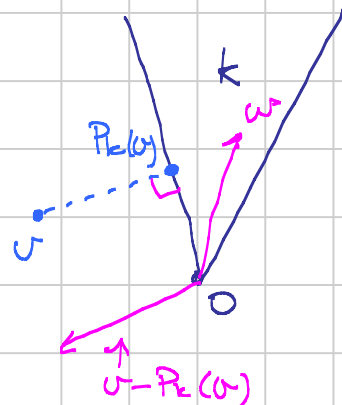
Se z verifica (i) e (ii), allora $z = P_K(v)$

Ipotesi: $\langle v - z, z \rangle = 0$
 $\langle v - z, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$

tesi: $\|v - z\|^2 \leq \|v - w\|^2$
 $\forall w \in K$



appena ci sono v e w ,
c'è tutta la zona tratteggiata



$$\begin{aligned}
\|v-w\|^2 &= \|(v-z) + (z-w)\|^2 \\
&= \|v-z\|^2 + \|z-w\|^2 + 2\langle v-z, z-w \rangle \\
&= \|v-z\|^2 + \underbrace{\|z-w\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\langle v-z, z \rangle}_{=0} - \underbrace{2\langle v-z, w \rangle}_{\geq 0} \\
&\geq \|v-z\|^2 \quad \text{c}
\end{aligned}$$

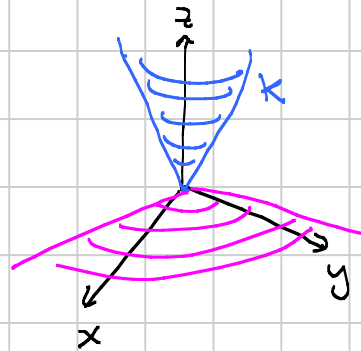
Esercizio 2 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il cono chiuso e convesso ↑ verifica!

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, z^2 \geq 2(x^2 + y^2)\}$$

Determinare i p.to $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tali che $P_K(x_0, y_0, z_0) = 0$.

L'origine deve verificare (i) e (ii) come sopra. Ora (i) è ovvia, mentre (ii) è equivalente a

$$\begin{aligned}
\langle (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \rangle &\leq 0 \quad \forall (x, y, z) \in K \\
\text{"} \\
x_0 x + y_0 y + z_0 z &\leq 0
\end{aligned}$$

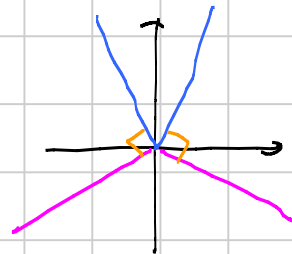


Scegliendo $(x, y, z) = (0, 0, 1) \in K$ scopriamo che $z_0 \leq 0$.

Scegliendo $(x, y, z) = (x_0, y_0, \sqrt{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}) \in K$ scopriamo che

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} z_0 \leq 0$$

da cui $\sqrt{2} z_0 \leq -\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ e quindi ($z_0 \leq 0$)



$$2z_0^2 \geq x_0^2 + y_0^2 \quad (\Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \text{cono con } z \text{ negativi e apertura "reciproca"})$$

Fino a qui abbiamo proceduto per cond. necessarie. Resta da verificare che ogni (x_0, y_0, z_0) con $z_0 \leq 0$ e $2z_0^2 \geq x_0^2 + y_0^2$ ha come

proiezione d'origine, il che equivale a dir. che ha prodotto scalare negativo con ogni elemento di K .

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 \leq xx_0 + yy_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} z$$

$$\begin{aligned} &\uparrow \\ &z \geq 0 \\ &z_0 \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\dots} \end{aligned}$$

$$\leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} z$$

C-S. $\uparrow$

$$= \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \sqrt{x^2 + y^2} - z \right\} \leq 0$$

$\uparrow$ per defn. di K .

Esempio 3 $H = L^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ (ma è uguale in uno spazio di misura)

Scegliamo ψ e φ in H con $\psi(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega$ e definiamo

$$K := \{g \in L^2(\Omega) : \psi(x) \leq g(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega\}$$

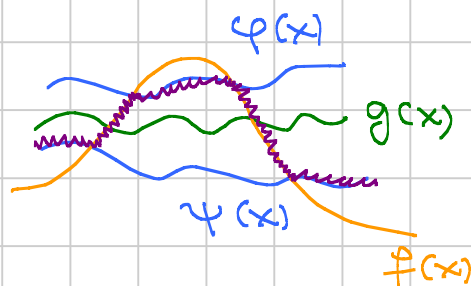
$\uparrow$ sarebbe quasi ogni...

Si verifica che K è convesso (facile esercizio da fare).

Determinare $P_K f$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$

Chi sarà la proiezione di $f(x)$?

Se c'è una logica si tratta del troncamento



Claim:

$$P_K f(x) = \hat{f}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } f(x) \geq \varphi(x) \\ f(x) & \text{se } \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \\ \psi(x) & \text{se } f(x) \leq \psi(x) \end{cases}$$

Come lo verifico? Ad esempio usando la caratterizzazione.

Chiamo Ω_+ , Ω_0 e Ω_- i 3 insiemi in cui $\hat{f}(x)$ vale

φ , f , ψ .

Devo verificare che

$$\langle f - \hat{f}, g - \hat{f} \rangle \leq 0 \quad \forall g \in K, \text{ cioè } \int_{\Omega} (f - \hat{f})(g - \hat{f}) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dots &= \underbrace{\int_{\Omega_+} \underbrace{(f - \hat{f})}_{\geq 0} \underbrace{(g - \hat{f})}_{\leq 0}}_{\leq 0} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \underbrace{(f - \hat{f})}_{=0} \underbrace{(g - \hat{f})}_{=0}}_{=0} + \underbrace{\int_{\Omega_-} \underbrace{(f - \hat{f})}_{\leq 0} \underbrace{(g - \hat{f})}_{\geq 0}}_{\leq 0} \\ &\leq 0 \quad \text{😊} \end{aligned}$$

Esempio 4 $L^2(\Omega)$ come prima, $A \subseteq \Omega$ misurabile

$$K := \{ g \in L^2(\Omega) : g(x) \geq 0 \quad \forall x \in A \} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{verificare che è} \\ \text{un convesso chiuso} \end{array}$$

Determinare $P_K f$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$.

La convessità è quasi ovvia. La chiusura segue dal fatto che ogni succ. che converge in L^2 ammette s.succ. che converge puntualmente q.o., e questa convergenza conserva le disug. (lo farebbe debole senza passare alle s.successioni).

Chi sarà mai la proiezione?

$$(P_K f)(x) = \hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \\ f(x) & \text{se } x \in A \text{ e } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \in A \text{ e } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

È ovvio che $\hat{f} \in A$. Verifichiamo che $\int_{\Omega} (f - \hat{f})(g - \hat{f}) \leq 0$ per ogni $g \in K$.

Chiamiamo $A_- = \{ x \in A : f(x) \leq 0 \}$. Allora

$$\int_{\Omega} \dots = \underbrace{\int_{\Omega \setminus A} \underbrace{(f - \tilde{f})}_{=0} (g - \tilde{f})}_{=0} + \underbrace{\int_A \underbrace{(f - \tilde{f})}_{\leq 0} \underbrace{(g - \tilde{f})}_{\geq 0}}_{\leq 0} \leq 0$$

Esempio 5 $H = L^2((0,2))$ e prendiamo

$$K := \left\{ g \in L^2((0,2)) : \int_0^1 g(x) dx \geq 7 + \int_1^2 g(x) dx \right\}$$

Si verifica che in entrambi i casi K è un convesso chiuso

Domanda: determinare $P_K f$ per ogni $f \in H$.

A occhio non si vede subito... pensarci ancora... pensare in astratto...

La condizione si scrive come

$$\int_0^1 g(x) dx - \int_1^2 g(x) dx = 7 \quad (\text{o con disuguaglianza})$$

$$= \int_0^2 g(x) \varphi(x) dx \quad \text{dove} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ -1 & \text{se } x \in (1,2) \end{cases}$$

$$= \langle g, \varphi \rangle$$

Quindi siamo nel caso di $K =$ iperpiano affine, trattato in una lezione precedente !!!

— o — o —