

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 29

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

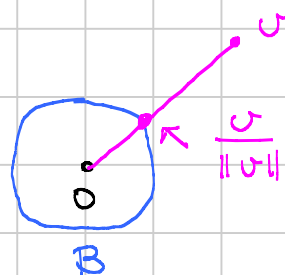
Note Title

06/10/2020

Esercizio 1 Sia V uno spazio normato, e sia B la palla unitaria chiusa (e convessa) con centro nell'origine.

Allora per ogni $v \in V$ esiste un elemento in B che minimizza la distanza da v , e questo elemento è

$$P_B(v) := \begin{cases} v & \text{se } \|v\| \leq 1 \\ \frac{v}{\|v\|} & \text{se } \|v\| \geq 1 \end{cases}$$



(occhio: non è detto che $P_B(v)$ sia l'unico p.to che minimizza la distanza da v (vedi lezione precedente))

Dim. Se $\|v\| \leq 1$ è ovvio. Quindi supponiamo $\|v\| > 1$.
Devo verificare che

$$\|v - P_B(v)\| \leq \|v - w\| \quad \forall w \in B$$

$$\|v - \frac{v}{\|v\|}\| \stackrel{?}{\leq} \|v - w\|$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\|v\|}\right)}_{>0} \|v\| \stackrel{?}{\leq} \|v - w\| \quad \leadsto \quad \|v\| - 1 \stackrel{?}{\leq} \|v - w\|$$

Questa è vera perché $\|v - w\| \geq \|v\| - \|w\| \geq \|v\| - 1$
 $\uparrow$
 $\|w\| \leq 1$

Esercizio 2 Dimostrare che la proiezione P_B è 2-lip, cioè

$$\|P_B(v) - P_B(w)\| \leq 2\|v - w\| \quad \forall (v, w) \in V^2$$

Dim. Se v e w stanno in B è ovvio

Supponiamo siano entrambi fuori, cioè $\|v\| > 1$ e $\|w\| > 1$.

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} \right\| \stackrel{?}{\leq} 2 \|v - w\| ;$$

$$\| \|w\|v - \|v\|w \| \stackrel{?}{\leq} 2 \|v - w\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

$$\begin{aligned} \| \|w\|v - \|v\|w \| &= \| \|w\|v - \|v\|v + \|v\|v - \|v\|w \| \\ &\leq \| (\|w\| - \|v\|)v \| + \| \|v\|(v - w) \| \\ &\leq \underbrace{|\|w\| - \|v\|| \cdot \|v\|}_{\leq \|w - v\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|} + \underbrace{\|v\| \cdot \|v - w\|}_{\leq \|v\| \cdot \|v - w\| \cdot \|w\|} \\ &\leq \|w - v\| \cdot \|v\| \cdot \|w\| + \|v\| \cdot \|v - w\| \cdot \|w\| \end{aligned}$$

Resta da fare il caso in cui, WLOG, $\|v\| \leq 1$ e $\|w\| > 1$ e questo si dovrebbe fare in modo del tutto analogo (FARLO!).

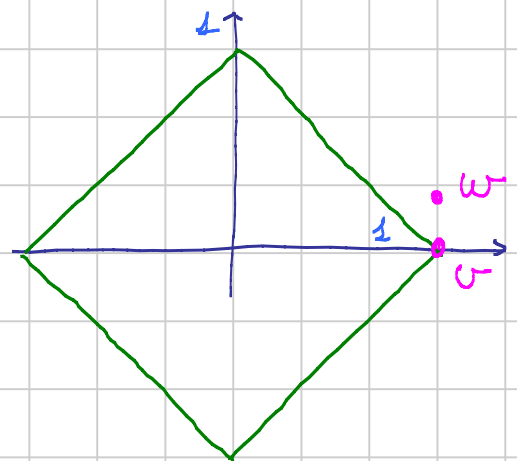
Oss. Se $v \neq w$, la disuguaglianza è in realtà stretta.

Esercizio 3 Esistono dei casi in cui P_B non è L -lipschitz con $L < 2$!!!

Dim. Basta prendere $\mathbb{R}^2$ con norma 1.

Prendiamo $v = (1, 0)$ e $w = (1, \varepsilon)$
(siamo dalle parti dell'angolo della palla)

Allora



$$P_B(v) = (1, 0) \quad P_B(w) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \quad \|v - w\| = \varepsilon$$

$$\|P_B(v) - P_B(w)\| = \left| 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} \right| + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \stackrel{?}{\leq} L \varepsilon$$

Facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ si vede che deve essere $L \geq 2$.

Curiosità

Se dimensione $(V) \geq 3$, allora P_B è 1-lip se e solo se la norma deriva da un prodotto scalare !!

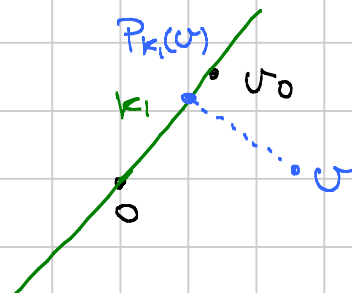
Esercizio 4

Sia H uno spazio di Hilbert (forse basta anche pre-Hilbert, cioè con prod. scalare ma non nec. completo). Sia $v_0 \neq 0$ un el. di H .

Determinare la proiezione sui seguenti convessi chiusi.

(a) $K_1 = \text{Span}(v_0)$

Idea: $P_{K_1}(v) =$ proiezione ortogonale di v su K_1



Claim: $P_{K_1}(v) = \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0$

(osserviamo che $\in K_1$ e che se cambio v_0 con γv_0 non cambia nulla)

Usando la caratt. deve essere

$$\langle v - P_{K_1}v, w - P_{K_1}v \rangle \leq 0 \quad \text{per ogni } w \in K_1$$

↑ anche = poiché K_1 è s.sp. vettoriale

Posto $w = \alpha v_0$, devo verificare

$$\langle v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, \alpha v_0 - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \rangle \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$\left(\alpha - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right) v_0$$

$$\left(\alpha - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right) \langle v, v_0 \rangle - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \left(\alpha - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right) \langle v_0, v_0 \rangle \stackrel{?}{\leq} 0$$

Giustamente vale il segno di $=$. 😊

(b) $K_2 := \text{Span}(v_0)^\perp = \{ w \in H : \langle w, v_0 \rangle = 0 \}$

Claim: $P_{K_2}(v) = v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0$ ← proiezione ortogonale di v su K_2

Devo verificare la relazione di prima $\forall w \in K_2$

$$\langle v - P_{K_2} v, w - P_{K_2} v \rangle \leq 0 \quad (\text{in realtà } =)$$

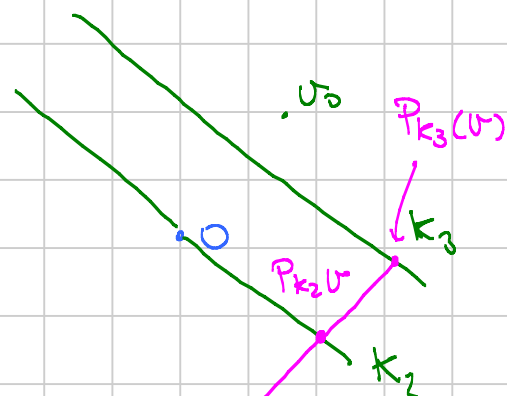
$$\left\langle \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, w - v + \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \right\rangle \leq 0$$

$$\frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \left\{ \underbrace{\langle v_0, w \rangle}_{=0} - \langle v_0, v \rangle + \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \langle v_0, v_0 \rangle \right\} = 0 \quad \text{☺}$$

(c) $K_3 := \{ w \in H : \langle w, v_0 \rangle = 7 \}$ (ripetiamo // al precedente)

$$\text{Claim: } P_{K_3}(v) = v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 + 7 \frac{v_0}{\|v_0\|^2}$$

Vediamo intanto (anzi dovute verificarlo pure prima) che $P_{K_3}(v) \in K_3$:



$$\begin{aligned} \langle P_{K_3}(v), v_0 \rangle &= \langle v, v_0 \rangle - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \langle v_0, v_0 \rangle + \frac{7 \langle v_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \\ &= 7 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Ora verifichiamo che

$$\langle v - P_{K_3}(v), w - P_{K_3}(v) \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K_3$$

↑ anche ora = 0 perché K_3 è comunque uno spazio affine

$$\left\langle \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 - 7 \frac{v_0}{\|v_0\|^2}, w - v + \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 - 7 \frac{v_0}{\|v_0\|^2} \right\rangle \leq 0$$

$$\frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} v_0 \quad \frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} v_0$$

$$\frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} \left\{ \underbrace{\langle v_0, w \rangle}_{=7} - \langle v_0, v \rangle + \frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} \langle v_0, v_0 \rangle \right\} = 0 \quad \text{☺}$$

Provare con $K_4 := \{ w \in H : \langle w, v_0 \rangle \leq 7 \}$.