

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 28

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Minimizzare la distanza da un chiuso e/o convesso

Esercizio 1 Sia (X, d) sp. metrico. Sia $C \subseteq X$ un chiuso $\neq \emptyset$.
Sia $x_0 \in X$.

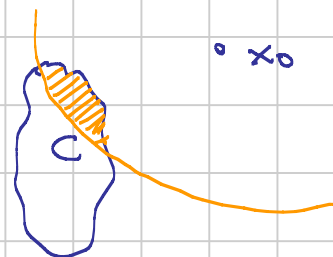
Domanda: possiamo concludere che esiste

$$\min \{ d(x_0, x) : x \in C \} \quad ?$$

Oss. Se C non è chiuso ci sono banali controesempi.

Risposta 1 Supponiamo in aggiunta che le palle chiuse di X siano compatte. Allora la risposta è affermativa.

Dim. Idea: considero palla centrata in x_0 abbastanza grande da intersecare C . Allora la battaglia per il minimo si gioca in questa palla $\cap C$.



Rigoroso: prendo $x_1 \in C$ e pongo $R := \text{dist}(x_0, x_1)$.
Considero

$$C \cap B(x_0, R)$$

Questo è $\neq \emptyset$ (contiene x_1) ed è compatto (chiuso in un compatto). Essendo $x \mapsto d(x, x_0)$ continua (va dimostrato) deduciamo che esiste

$$\min \{ d(x, x_0) : x \in C \cap B(x_0, R) \}.$$

Sia x_m un p.to di minimo. Allora x_m è p.to di min. su tutto C

→ Se $x \in C \cap B(x_0, R)$, allora $d(x, x_0) \geq d(x_m, x_0)$

→ Se $x \in C$ ma $x \notin B(x_0, R)$, allora

$$d(x, x_0) \geq R = d(x_1, x_0) \geq d(x_m, x_0).$$

(>) ↑ $x_1 \in B(x_0, R) \cap C$



Risposta 2 Se non si assume la cpt. delle palle chiuse, la risposta può essere negativa!

Esempio (Addirittura in uno sp. di Hilbert)

Prendiamo un H separabile con base ortonormale $\{e_n\}$.

Consideriamo

$$C = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

e $x_0 = 0$ (origine).

Claim: C è chiuso e il minimo della distanza non esiste.

→ min. non esiste perché $\text{dist}(x_0, (1 + \frac{1}{n})e_n) = 1 + \frac{1}{n}$
e non ha min.

→ C è chiuso perché ogni succ. di Cauchy a valori in C
è definitivamente costante, dunque banalmente convergente
ad un elemento di C .

Questo fatto segue da

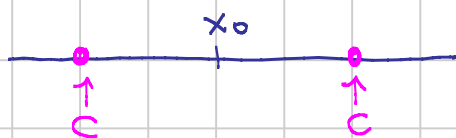
$$\text{dist}\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)e_n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)e_m\right) = \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{2}$$

se $m \neq n$.

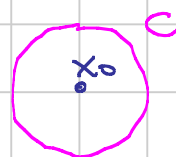
Morale: in dim. infinita la distanza di un p.to da un chiuso
può non raggiungere il valore minimo.

Esercizio 2 Esistono facili esempi in cui il p.to di minima
distanza NON è unico.

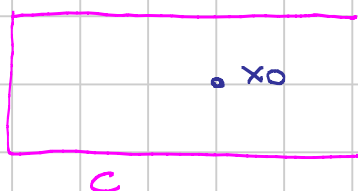
In $\mathbb{R}$



in $\mathbb{R}^2$



in $\mathbb{R}^2$



Quindi non è una questione
di convessione

Esercizio 3 (Violazioni di unicità con C chiuso e convesso, ovviamente in spazi che non sono Hilbert).

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\|_1 := |x| + |y|$.

Il p.to di minima distanza da un chiuso esiste sempre

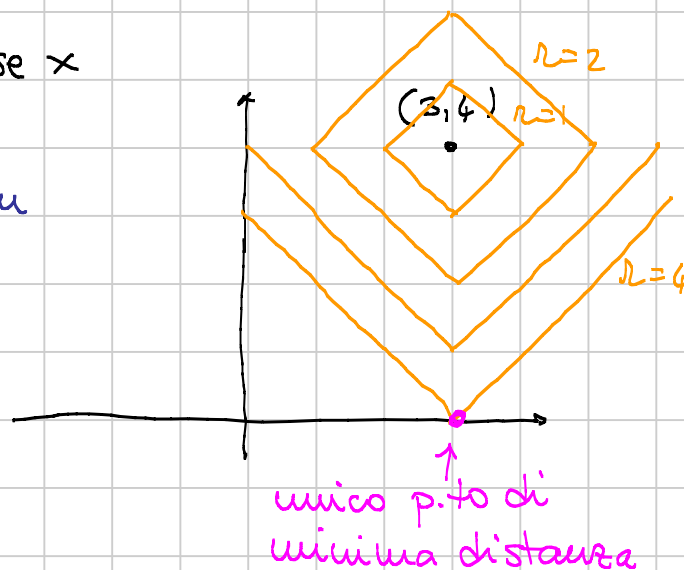
(basta osservare che $\mathbb{R}^2$ con la norma 1 ha le palle compatte, e questo segue dal fatto che tutte le norme in $\mathbb{R}^2$ inducono la stessa topologia essendo equivalenti $\leadsto$ Analisi 2).

Conduciamo il minimo con diverse scelte del chiuso e convesso

(a) $(x_0, y_0) = (3, 4)$

$k_1 = \text{Asse } x$

Considero le palle concentriche con centro in $(3, 4)$ e ingrandisco fino a toccare k_1 .



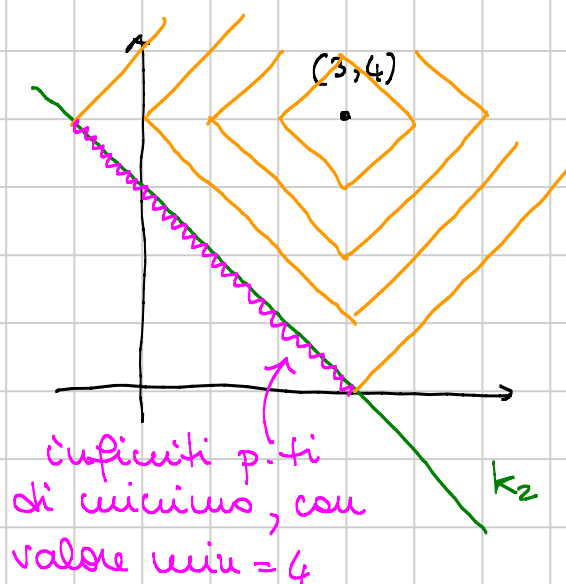
(b) $(x_0, y_0) = (3, 4)$

$k_2 = \text{retta } x+y=3$

$\uparrow$ chiuso e CONVESSO

Abbiamo ∞ p.ti di minimo

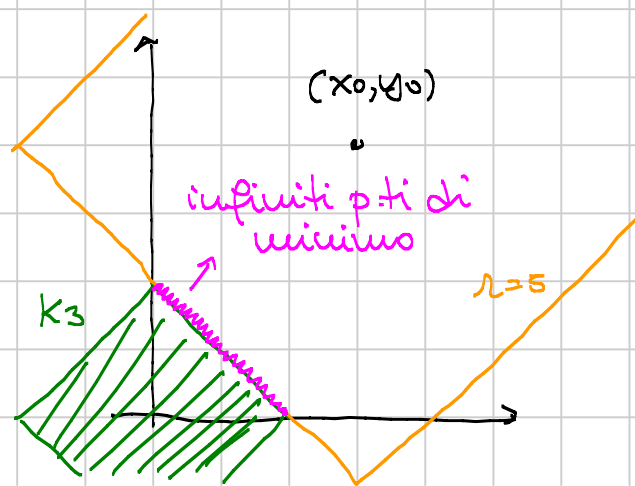
Achtung! Ci sono esempi di spazi di Banach in cui la distanza da un convesso chiuso esiste, ma il p.to di MINIMO non è unico.



(c) $(x_0, y_0) = (3, 4)$

$k_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$

(palla con centro $(0,0)$ e raggio 2, quindi chiuso e convesso e pure compatto)



Morale: Per una unicità, nel caso di C convesso, può avvenire solo se "il bordo della palla contiene dei segmenti".

Potremmo definire una norma strettamente convessa se

$$\|x\| = 1, \|y\| = 1, x \neq y \Rightarrow \|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

$x \neq y$ stanno sul bordo della palla

il segmento congiungente sta dentro

Esercizio 4 Se una norma è strett. convessa, allora il p.to di min. distanza da un chiuso convesso, posto che esista, è necessariamente unico.

Idea: se due punti hanno la stessa distanza R da un certo x_0 , allora il loro p.to medio sta ancora nel convesso e dista da x_0 meno di R .

Esercizio 5 Quali norme p -esime in $\mathbb{R}^2$, o più in generale in $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{L}^p$, hanno la proprietà di stretta convessità?

Tutte, tranne quelle con $p=1$ oppure $p=+\infty$. Basta dim. che $|x_1|^p + |y_1|^p = 1$ e $|x_2|^p + |y_2|^p = 1$, allora $\left| \frac{x_1+x_2}{2} \right|^p + \left| \frac{y_1+y_2}{2} \right|^p < 1$. Questo dovrebbe seguire dalla stretta convessità di $x \rightarrow x^p$.

Infatti, se $x_1 \neq x_2$ (e wlog questo è vero)

$$\left| \frac{x_1+x_2}{2} \right|^p < \frac{|x_1|^p + |x_2|^p}{2}$$
$$\left| \frac{y_1+y_2}{2} \right|^p < \frac{|y_1|^p + |y_2|^p}{2}$$

} sommando segue la tesi

Oss. Nella terza parte del corso si ritornerà sulla questione ESISTENZA del p.to di min. distanza (o di almeno un p.to).