

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 27

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Identità del parallelogrammo

In uno sp. vett. con prod. scalare definito positivo la norma soddisfa

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

somma $\square$ lunghezze diag.
= somma $\square$ lunghezze lati

per ogni x e y nello spazio.

Jordan - Fréchet - von Neumann

In uno sp. normato V la norma deriva da un prod. scalare se e solo se vale l'identità del parallelogrammo. In tal caso il prod. scalare è dato da

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} \{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \} \quad \forall (x, y) \in V^2$$

Esercizio 1 Supponiamo che in uno sp. normato V valga una disuguaglianza del parallelogrammo, ad esempio

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall (x, y) \in V^2$$

Allora in realtà vale sempre = (idem se posto con $\leq$)

Dim. Applico la disug. con $v = x+y$ e $w = x-y$

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 \geq 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

$$4\|x\|^2 + 4\|y\|^2 \geq 2\|x+y\|^2 + 2\|x-y\|^2$$

Semplificando un 2 e confrontando con l'ipotesi si ha la tesi.

Esercizio 2 Dimostrare JFN a partire dalla definizione

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2} \{ \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \}$$

[Tanti provano a dimostrarlo così all'esame, piantandosi :)]

Dim Step 1 Banalità

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Ok
- $\langle x, 0 \rangle = 0$ Ok
- $\langle -x, y \rangle$ da questa definizione per ora non si ottiene nulla
- $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ Ok

Step 2 In questa dim. c'è una sda cosa da ricordare: l'additività va fatta prima con il 2.

Dimostriamo che

$$\langle 2z, x+y \rangle = 2\langle z, x \rangle + 2\langle z, y \rangle$$

Scrivo la defn. per LHS e RHS

$$\frac{1}{2} \{ \| \underbrace{2z + x + y}_{(z+x) + (z+y)} \|^2 - \|2z\|^2 - \|x+y\|^2 \} \stackrel{?}{=} \|z+x\|^2 - \|z\|^2 - \|x\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z\|^2 - \|y\|^2$$

Usando il parallelogramma il LHS diventa

$$\frac{1}{2} \{ 2\|z+x\|^2 + 2\|z+y\|^2 - \underbrace{\|x-y\|^2}_{(z+x) - (z-y)} - 4\|z\|^2 - \|x+y\|^2 \}$$

$$= \cancel{\|z+x\|^2} + \cancel{\|z+y\|^2} - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - 2\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y\|^2$$

$$\stackrel{?}{=} \cancel{\|z+x\|^2} - \cancel{\|z\|^2} - \|x\|^2 + \cancel{\|z+y\|^2} - \cancel{\|z\|^2} - \|y\|^2 \leftarrow \text{vecchio RHS}$$

Ciò che resta è il parallelogramma con x e y :).

Step 3 Mettendo $y=0$ nello step 2 troviamo
 $\langle 2z, x \rangle = 2\langle z, x \rangle$ (posso portare fuori i 2)

A questo punto abbiamo che

$$2\langle z, x+y \rangle = \langle 2z, x+y \rangle = 2\langle z, x \rangle + 2\langle z, y \rangle$$

e semplificando il 2 abbiamo l'additività.

Step 4 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$

- conquisto $\lambda \in \mathbb{N}$ per inclusione usando l'additività
- conquisto $\lambda \in \mathbb{Z}$ usando che

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \lambda x + (-\lambda)x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle + \langle (-\lambda)x, y \rangle \\ &= \underbrace{\lambda \langle x, y \rangle}_{\text{porto al RHS}} + \langle (-\lambda)x, y \rangle \end{aligned}$$

- conquisto $\lambda \in \mathbb{Q}$ usando $\mathbb{Z}$. Se $\lambda = \frac{m}{n}$, allora

$$m \langle x, y \rangle = \langle mx, y \rangle = \langle n \cdot \frac{m}{n} x, y \rangle = n \underbrace{\langle \frac{m}{n} x, y \rangle}_{\text{porto fuori}}$$

$m \uparrow$ dentro

Dividendo per n si ha la tesi.

Step 5 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Basta osservare che le 2 funzioni

$$\lambda \rightarrow \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad \lambda \rightarrow \langle \lambda x, y \rangle$$

sono continue e coincidono in $\mathbb{Q}$.

La continuità della prima è ovvia. Quella della seconda segue dalla continuità di $\lambda \rightarrow \|\lambda x\|$ e $\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|$

e questa segue dalla triangolare, tipo

$$\left| \underbrace{\|\lambda_1 x\|}_0 - \underbrace{\|\lambda_2 y\|}_0 \right| \leq \underbrace{\|\lambda_1 x - \lambda_2 x\|}_0 = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x\|$$

Counterpositive Se voglio dimostrare che una norma NON deriva da un prodotto scalare, basta esibire una violazione del parallelogramma.

Esempio 3 (Norme p -esime in $\mathbb{R}^2$). Per ogni $p \geq 1$ poniamo

$$\|(x, y)\|_p := \{ |x|^p + |y|^p \}^{1/p} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Si verifica che quella definita è una norma in $\mathbb{R}^2$

Nel caso $p = +\infty$ si pone

$$\|(x, y)\|_\infty := \max \{ |x|, |y| \} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Anche questa è una norma

Dim L'unica verifica non banale è la triangolare

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

cioè, ponendo $v = (x_1, y_1)$ e $w = (x_2, y_2)$,

$$\{ |x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p \}^{1/p} \stackrel{?}{\leq} \{ |x_1|^p + |y_1|^p \}^{1/p} + \{ |x_2|^p + |y_2|^p \}^{1/p}$$

Elevo alla potenza p :

$$|x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p = |x_1 + x_2|^{p-1} |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|^{p-1} |y_1 + y_2|$$

$$\leq \underbrace{|x_1 + x_2|^{p-1} |x_1|}_{\frac{p-1}{p}} + \underbrace{|x_1 + x_2|^{p-1} |x_2|}_{\frac{p-1}{p}} + \underbrace{|y_1 + y_2|^{p-1} |y_1|}_{\frac{p-1}{p}} + \underbrace{|y_1 + y_2|^{p-1} |y_2|}_{\frac{p-1}{p}}$$

(Hölder)

$$\leq \{ |x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p \}^{\frac{p-1}{p}} \{ |x_1|^p + |y_1|^p \}^{\frac{1}{p}} + \{ |x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p \}^{\frac{p-1}{p}} \{ |x_2|^p + |y_2|^p \}^{\frac{1}{p}}$$

Semplificando i due termini comuni del RHS si ottiene

$$\{ |x_1+x_2|^p + |y_1+y_2|^p \}^{1/p} \leq \{ |x_1|^p + |y_1|^p \}^{1/p} + \{ |x_2|^p + |y_2|^p \}^{1/p}.$$

Osservazione Lo stesso trucco funziona con un qualunque numero di variabili, anche numerabile, cioè in ℓ^p .
La dimostrazione nel caso $p = +\infty$ è più semplice.
Sovene $p \geq 1$ per poter usare Hölder.

Esercizio 4 Dimostrare che la norma p -esima in $\mathbb{R}^2$ deriva da un prodotto scalare se e solo se $p=2$.

Dim. Per $p=2$ lo sappiamo. Impostiamo il parallelogramma con $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$

$$\begin{aligned} \| (1,1) \|_p^2 + \| (1,-1) \|_p^2 &= 2 \| (1,0) \|_p^2 + 2 \| (0,1) \|_p^2 \\ 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} &= 4 \leadsto 2^{\frac{2}{p}+1} = 2^2 \leadsto \frac{2}{p} = 1 \leadsto p=2. \end{aligned}$$

Analogo per la norma ∞ .

Esercizio 5 Per quali spazi di misura (X, m, μ) si ha che $L^5(X, m, \mu)$ è uno sp. di Hilbert.

Se in X c'è sostanzialmente un unico insieme misurabile di misura positiva, allora L^5 è isomorfo ad $\mathbb{R}$ con la solita norma, che è uno spazio di Hilbert.

Se in X ci sono due insiemi disgiunti A e B di misura positiva, allora impostiamo il parallelogramma con le loro caratteristiche

$$\begin{aligned} \| \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B \|_5^2 + \| \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \|_5^2 &= 2 \| \mathbb{1}_A \|_5^2 + 2 \| \mathbb{1}_B \|_5^2 \\ 2 \{ \text{meas}(A) + \text{meas}(B) \}^{\frac{2}{5}} &= 2 \{ \text{meas}(A) \}^{\frac{2}{5}} + 2 \{ \text{meas}(B) \}^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

che è impossibile, se sono entrambe positive (verifica!).