

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 24

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

$$F(u) = \int_0^1 \left[\frac{\dot{u}}{1+u^2} \right]^2 dx \quad u(0)=0, u(1)=1$$

Domanda: $F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M'$

IN generale NO, almeno se u_n può essere enorme.

Argomento di truncamento

$$\inf \{ F(u) : u \in H^1 + DBC \} = \inf \{ F(u) : u \in H^1 + DBC + 0 \leq u(x) \leq 1 \forall x \in [0,1] \}$$

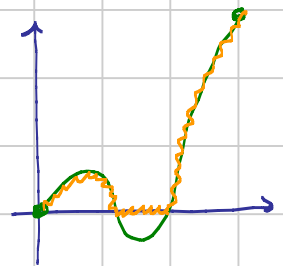
$\leq$ Sto facendo inf su meno roba

$\geq$ Ogni competitore si può migliorare in modo da rispettare la condizione.

Brutal mode: u può andare sotto 0?

No, perché se truco ho risparmiato, o se proprio non ho perso.

IDEM se u va sopra 1.



Grossa sottigliezza (delicata, ma va capita)

Si dimostra che, se u ha un intervallo $(a,b) \subseteq [0,1]$ in cui sta negativa e 0 al bordo, allora la migliore truncando. Questo non basta per la sostituzione in quanto potrebbero esserci infiniti intervallini in cui succede, e dovrei in qualche modo iterare infinite volte il procedimento. Non è facilissimo da formalizzare.

2ª parte del corso: se $u \in H^1$, allora $\hat{u} = \max \{ u, 0 \} \in H^1$
e $\hat{u} = \begin{cases} u' & \text{dove } \hat{u} = u \\ 0 & \text{dove } \hat{u} = 0 \end{cases}$ $\uparrow$ vera truncata globale

Dato per buono che possiamo restringerci alle $0 \leq u(x) \leq 1$, possiamo finalmente avere compattezza

$$M \geq F(u_n) = \int_0^1 \frac{\dot{u}_n^2}{(1+u_n^2)^2} dx \geq \frac{1}{4} \int_0^1 \dot{u}_n^2 dx$$

↑
denominatore max possibile

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_2^2 \leq 4M$$

$$DBC \Rightarrow \|u_n\|_{L^\infty} \leq M' \Rightarrow \text{a meno di s.succ.}$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif e } \dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_\infty$$

SCI Lemma dell'altra volta, basta osservare che

$$\frac{\dot{u}_n}{1+u_n^2} = \frac{1}{1+u_n^2} \dot{u}_n \xrightarrow{\uparrow} \frac{1}{1+u_\infty^2} \dot{u}_\infty$$

unif. x debole

e si conclude per sci della norma.

Regolarità Si arriva al solito modo a C^∞ (una volta arrivati a C^2 , sappiamo che è per forza $\tan(\frac{\pi}{4}x)$).

SCAPPATOIA VIA CAMBIO DI VARIABILI

$$F(u) = \int_0^1 \left[\frac{\dot{u}}{1+u^2} \right]^2 dx$$

Poniamo $v(x) = \arctan(u(x))$. Allora $v(0) = 0$ e $v(1) = \frac{\pi}{4}$

Inoltre

$$\dot{v}(x) = \frac{\dot{u}(x)}{1+u(x)^2}$$

Ma allora il problema equivale a $\min \left\{ \int_0^1 \dot{v}(x)^2 dx : v(0) = 0, v(1) = \frac{\pi}{4} \right\}$

e questo sappiamo che ha come soluzione $v(x) = \frac{\pi}{4}x$ 😊.

Per esercizio: usare il cambio di variabili per mostrare formalmente che $\tan(\frac{\pi}{4}x)$ è unico p.to di min in $C^1([0,1])$ e anche in $H^1((0,1))$.

Esempio 2 Sia $a > 0$ un numero reale. Studiare il problema

$$\min \left\{ \int_0^1 x^a u^2 : u(0)=1, u(1)=2 \right\}$$

Sarà delicato stabilire dove ammettiamo u (C^1 ? H^1 ? $W^{1,p}$?)

Brutal mode: $L(x,s,p) = x^a p^2$

$$(ELE) \quad (L_p)' = L_s \quad (2x^a u)' = 0 \rightsquigarrow 2x^a u' = c$$

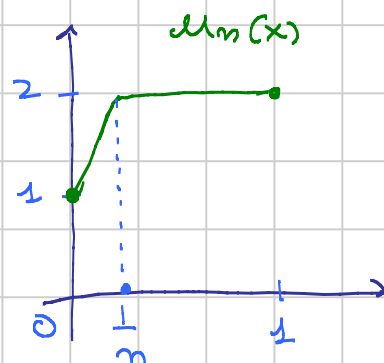
$$\rightsquigarrow u' = \frac{c}{2x^a} \rightsquigarrow u(x) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-a} x^{1-a} + d$$

Imponendo le DBC sembra che non ci siano plem. se $a < 1$ e invece guai se $a \geq 1$. Se però anche fosse $a = \frac{1}{2}$, la soluzione non sarebbe C^1 fino a $x=0$

Congettura: $\rightarrow$ se $a \in (0,1)$ allora l'unica sol. è quella di sopra, ma non è C^1 . Quindi in C^1 non c'è minimo, ma c'è un inf. positivo.
 $\rightarrow$ se $a \geq 1$, allora min. non esiste in nessuno spazio decente e inf = 0.

$a \geq 1$ Prendi $u_n(x)$ come in figura, vale

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \int_0^{\frac{1}{n}} x^a n^2 dx = n^2 \cdot \frac{1}{a+1} \frac{1}{n^{a+1}} \\ &= n^{1-a} \frac{1}{a+1} \end{aligned}$$



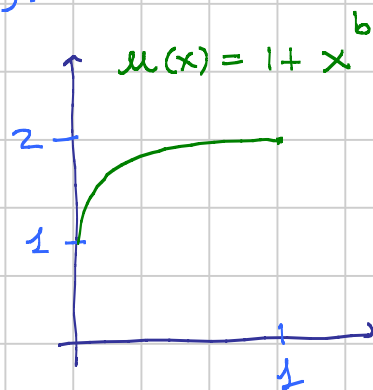
Già con questo esempio vediamo che $F(u) \rightarrow 0$ se $a > 1$.

Questo dice che $\inf = 0$ in H^1 , ma anche in C^1 oppure in C^∞ (basta fare piccolo raccordo).

Resta caso $a=1$. Proviamo con

$$u(x) = 1 + x^b \quad \text{con } b > 0$$

(tendenzialm. $b \rightarrow 0$)



$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 x \cdot b x^{b-1} dx = \int_0^1 b x^b dx \\ &= \frac{b}{b+1} [x^{b+1}]_0^1 = \frac{b}{b+1} \end{aligned}$$

Quando $b \rightarrow 0$, ancora una volta vedo che $\inf$ è 0 in tutte le classi che contengono queste funzioni, ma approssimando anche in C^1 o C^∞ .

Volendo basta prendere

$$u(x) = 1 + \frac{(x+\varepsilon)^b}{(1+\varepsilon)^b}$$

Queste sono C^∞ e approssimano il valore $\frac{b}{b+1}$ (... fare conto!).

$a \in (0, 1)$ Ogni competitor w lo scriviamo come

$$w = u_0 + v$$

e calcoliamo

$$F(w) = \underbrace{\int_0^1 x^a u_0^2 dx}_{F(u_0)} + 2 \underbrace{\int_0^1 x^a u_0 \dot{v} dx}_{\text{?}} + \underbrace{\int_0^1 x^a \dot{v}^2 dx}_{\geq 0}$$

$$\text{Ma } \int_0^1 x^a u_0 \dot{v} = \int_0^1 x^a \frac{k}{x^a} \dot{v} = k \int_0^1 \dot{v} = v(1) - v(0) = 0$$

Domanda: posto $\alpha = \frac{1}{2}$, in quale spazio avremmo potuto applicare il metodo diretto?

Brutal mode: $\dot{u} = \frac{c}{\sqrt{x}}$, quindi $\dot{u} \in L^p \Leftrightarrow p < 2$

quindi per $p \geq 2$ non c'è speranza, qualcosa DEVE fallire
per $p < 2$ c'è speranza

... compattezza... $F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^p} \leq M'$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \dot{u}_n^2 \leq M$$

$$\int_0^1 |\dot{u}_n|^p dx = \int_0^1 \underbrace{|\dot{u}_n|^p x^{\frac{p}{4}}}_{\frac{p}{2}} \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{p}{4}}}}_{\frac{2-p}{2}} dx$$

Hölder $\nearrow \leq \underbrace{\left\{ \int_0^1 |\dot{u}_n|^2 x^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{p}{2}}}_{\leq M^{\frac{p}{2}}} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{p}{4} \frac{2}{2-p}}} dx \right\}^{\frac{2-p}{2}}$

Vorrei tanto che l'altro converga, cioè $\frac{p}{4} \frac{2}{2-p} \stackrel{?}{<} 1$

$$\frac{p}{2(2-p)} \stackrel{?}{<} 1$$

$$p < 4 - 2p$$

$$3p < 4$$

$$p < \frac{4}{3}$$

Controllare bene gli esponenti. Il conto fatto direbbe che per $p < \frac{4}{3}$ davvero riesco ad avere il metodo diretto in $W^{1,p}$

— o — o —