

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 22

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

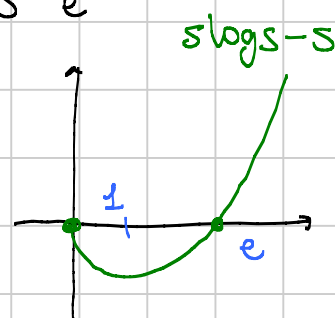
Note Title

06/10/2020

Esempio
$$\begin{cases} \ddot{u} = \log u \\ u(0) = u(3) = 2 \end{cases}$$

Osserviamo che una primitiva di $\log s$ è $s \log s - s$ e consideriamo

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + s \log s - s$$



e il pbm. di minimo

$$\min \left\{ \int_0^3 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + u \log u - u \right) dx : u \in H^1((0,3)), \right. \\ \left. \begin{array}{l} u(0) = u(3) = 2 \\ \text{passano al lim. per} \rightarrow u(x) \geq 0 \\ \text{conv. unif.} \end{array} \right\}$$

Metodo diretto standard: esistenza ed unicità del p.to di min.

Il p.to di min. risolve l'equazione?

$$\varphi(t) := F(u + tv)$$

$$\varphi'(0) = \int_0^3 (\dot{u} \dot{v} + \log u \cdot v) dx$$

C'è però un **GROSSO PROBLEMA**: quando scriviamo $u + tv$, siamo sicuri che $u(x) + tv(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0,1]$?

Almeno per valori di t vicini a 0?

Questo è garantito se $v(x) \geq 0$ sempre e $t > 0$, ma questo ci porterebbe a $\varphi'(0) \geq 0$ (φ avrebbe minimo per $t=0$ ma è definita solo per $t \geq 0$) e questo non basta per immercare FLCV.

SE sapessi che $u(x) \geq A > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, allora data $\varphi \in C_c^\infty$ qualunque (ma basta limitata) avrei la garanzia che $u + t\varphi \geq 0$ per $|t|$ piccoli.

Qui entra in gioco l'argomento di truncamento, che non posso fare sull'equazione, ma devo fare sul funzionale.

CLAIM: $u(x) \geq 1$ sempre
 $\uparrow$ p.to di min di logs - 5

La realizzazione è la stessa della lezione precedente, e anzi si ottiene pure $u(x) > 1$.

A questo p.to il resto fila liscio.

Achtung! Non andava bene porre la condizione $u(x) > 0$ nel problema di minimo.

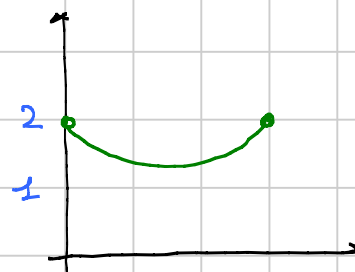
Il problema è che le disug. strette non passano al limite, quindi l'insieme di defn. non sarebbe compatto.

Andava bene porre $u(x) \geq 1$ oppure $u(x) \geq \frac{1}{2}$ oppure $u(x) \geq \frac{3}{2}$ nel problema di minimo?

NI Queste cond. passano al limite, quindi il minimo esisteva quasi gratis. Il problema è che nel ricavare ELE non potevo usare v e t di segno qualunque quando si fa $F(u + t\varphi)$ e quindi niente FLCV.

La carta vincente è minimizzare con una condizione del tipo $u(x) \geq 0$, oppure $u(x) \geq \frac{1}{2}$, e poi con l'argomento di truncamento trovare una stima + forte $u(x) \geq 1$.

Oss. A posteriori la soluzione è
convessa perché sta nella regione
 $u(x) > 1$ ($\ddot{u} = \log u$)



Esempio 2 (variante del precedente)

$$\ddot{u} = \log u$$

$$u(0) = u(3) = \frac{1}{2}$$

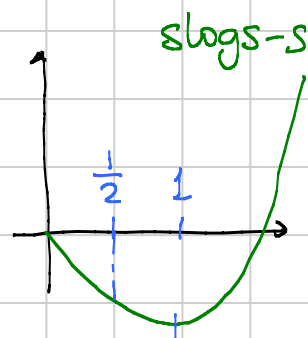
Formulazione variazionale

$$\min \left\{ \int_0^3 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + u \log u - u \right) dx : u \in H^1((0, 3)) \right.$$

$$u(0) = u(3) = \frac{1}{2}$$

$$u(x) \geq 0 \left. \right\}$$

Il minimo esiste e dimostriamo che $u(x) \geq \frac{1}{2}$
sempre con argomento di troncamento.



Oss. Valeva la stessa cosa con
 $u(0) = 2$ e $u(3) = \frac{1}{2}$

L'argomento di troncamento dava $\frac{1}{2} \leq u(x) \leq 2$ sempre.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \left(\dot{u}^2 + \frac{1}{u^4} \right) dx : u(0) = 4 \right\}$

Il problema nasce dal fatto che $\frac{1}{u^4}$ non è sempre integrabile

→ Formulazione debole

Osservo che $F(u)$ può essere considerato
in H^1 , ma occorre ammettere il valore
 $+\infty$ come valore possibile

(se c'era u^3 il problema era ben peggiore)

→ Compattità

Se $F(u_n) \leq M$ (questo taglia fuori i $+\infty$
ammessi)

allora $\|u_n\|_{L^2} \leq M \Rightarrow u_n \rightharpoonup v_\infty$ debole L^2

Grazie alla DBC abbiamo $|u_n(x)| \leq M' \Rightarrow$ da A.A. otteniamo conv. unif. delle funzioni.
Quindi a meno di s.succ.

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

→ SCI Sulla parte di derivata è la SCI della norma

SULLA PARTE DI FUNZIONE NON SEGUE DALLA CONV. UNIF.
che vale solo quando abbiamo $\varphi(u_n)$ con φ CONTINUA.

Uscita facile: LEMMA DI FATOÙ. Osserviamo che $\frac{1}{u^4} \geq 0$
(limitato dal basso) quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{u_n^4} dx &\geq \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n(x)} dx \\ &\quad \uparrow \text{FATOÙ} \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n(x)} dx \\ &\quad \uparrow \text{conv. unif.} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{u_\infty(x)^4} dx \end{aligned}$$

(tutto questo vale anche se ci sono 0 al denominatore)

A priori non c'è lim nella parte di funzione, ma c'è liminf, che comunque basta.

Quindi il minimo esiste.

Se vogliamo calcolare ELE, c'è il problema che serve la derivabilità per $t \rightarrow 0$ di $F(u+tv)$, e questa è impossibile da ottenere se $u(x)$ si annulla da qualche parte.

Brutal mode: partendo da 4, non conviene andare verso 0, perché si paga sia con u^2 sia con $\frac{1}{u^4}$

CLAIM: $u(x) \geq 4$ per ogni $x \in [0, 1]$ $\leadsto$ solito argomento di truncamento

Achtung! Se minimizzavamo con la condizione $u(x) \geq 4$, poi non potevamo fare variazioni $F(u + \epsilon \phi)$

Oss. Potevamo invece

$\rightarrow$ minimizzare con condizione $u(x) \geq 3$ (in questo caso non serve FATOU e la parte di funzione passava al limite perché $\frac{1}{s^4}$ è continua per $s \geq 3$)

$\rightarrow$ Dimostrare con arg. trunc. che $u(x) \geq 4$ sempre e quindi ricavare ELE.

— o — o —

Variante 1 (Senza DBC) $\min \left\{ \int_0^1 \left(u'^2 + \frac{1}{u^4} \right) dx : u \in C^1([0, 1]) \right\}$

Si vede ad occhio che $\inf = 0$, $u_n(x) \equiv n$ è succ. l'infinito e quindi min non esiste.

Cosa si piantava nella dimostrazione?

Non si riusciva ad ottenere la stima uniforme su $|u_n(x)|$

Variante 2 (Con il cubo) $\min \left\{ \int_0^1 \left(u'^2 + \frac{1}{u^3} \right) dx : u \in H^1((0, 1)) \right\}$
 $u(0) = 4$

(Senza DBC il minimo è chiaramente $-\infty$ con succ.

infinito $u_n(x) \equiv -\frac{1}{n}$)

Se aggiungo come condizione $u(x) \geq 0$, allora tutto come prima e anzi $u(x) \geq 4$ sempre.

Domanda: u può arrivare a 0 restando H^1 e tenendo $\int \frac{1}{u^3}$ limitato? Esercizio! (Pensare $H^1 \Rightarrow \frac{1}{2}$ -Hölder)