

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 21

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

ARGOMENTI DI TRONCAMENTO

Esempio 1 $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + \dot{u}^2 + u^3 + 3u) dx : u(0) = u(1) = 4 \right\}$

Esistenza del minimo

→ Formulazione variazionale in $H^1((0,1))$ ammettendo il valore $+\infty$
(non so se $\dot{u}^4$ è integrabile)

In alternativa: in $W^{1,4}((0,1))$ ammettendo solo valori reali,
oppure in $W^{1,3}((0,1))$ sempre ammettendo $+\infty$.

→ Compattezza: classica rispetto a $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e
 $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ in qualche senso debole.

Questo segue da

$$L(x, s, p) = p^4 + p^2 + s^3 + 3s \geq p^4 - 2|s|^3 \quad (\text{importante: } 4 > 3)$$

e dal fatto che abbiamo DBC.

→ SCI: nella parte di funzione segue dalla conv. unif.
Nella parte di derivata segue da conv. debole L^1 +
convessità di $p^4 + p^2$.

→ Regolarità + ELE: tutto classico fino a C^∞ . Dopo aver
verificato che si può derivare $F(u+\tau v)$ sotto il segno
di integrale, arriviamo a

$$\int_0^1 \{ (2\dot{u} + 4\dot{u}^3) \dot{v} + (3 + 3u^2) v \} dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

↑
basta C^1 e nulla al bordo

Questa ci dice che $(2u + 4u^3)' = 3(u^2 + 1)$
derivata debole

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow 2u + 4u^3 \in C^1$$

compatibilità classica

Vorrei tanto dire che $u \in C^1$...

Osservo che $\varphi(p) := 2p + 4p^3$, vista come $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva
e $\varphi'(p) = 2 + 12p^2 \geq 2$. (> 0 sempre)

Per il teorema della funzione inversa $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞
ma allora

$$u = \varphi^{-1}(\underbrace{2u + 4u^3}_{\in C^1}) \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

Per BOOTSTRAP, continuando ad usare la reg. di φ , si arriva
a $u \in C^\infty$.

→ Unicità: non è detto che ci sia.

Esempio 2 $\min_u \left\{ \int_0^1 (u^2 + u^4 + u^4 + 4u) dx : u(0) = u(1) = 0 \right\}$

Per metodo diretto facile, il minimo esiste.

CLAIM $-1 \leq u(x) \leq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$

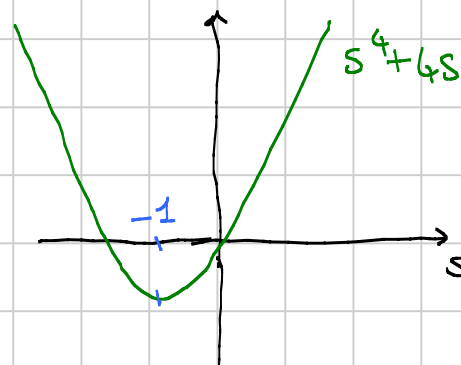
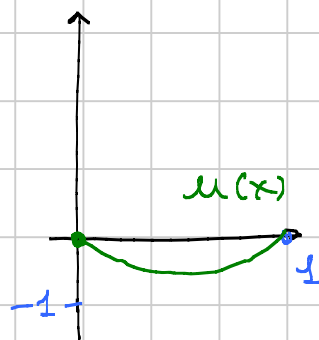
Consideriamo $u^4 + 4u$: questa ha minimo
per $x = -1$

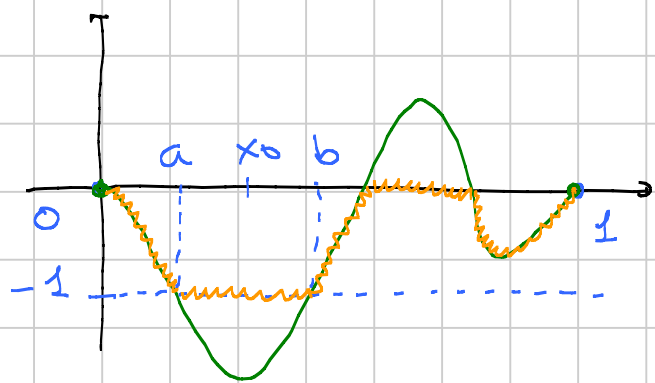
$$4u^3 + 4 = 0 \rightsquigarrow u = -1$$

Come può che $u(x)$ vada sopra 0?

Come può che $u(x)$ vada sotto -1?

NO Infatti, se lo facesse, TRONCANDO
migliorerei, dal momento che
risparmierei sia sulla derivata, sia sulla funzione





Supponiamo il minimo fatto
come in figura.
Allora truncando meglio

Come dirlo rigorosamente

Sia $u(x)$ il p.to di min. (qui si vede che è unico, ma non serve).

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in (0,1)$ t.c. $u(x_0) < -1$.

Pongo

$$a := \sup \{ x \in [0, x_0] : u(x) \geq -1 \}$$

$$b := \inf \{ x \in [0, x_0] : u(x) \geq -1 \}$$

Allora si verifica che $u(a) = u(b) = -1$ e

$$u(x) < -1 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$(0 < a < x_0 < b < 1)$$

(dimostrare per bene questi punti).

Ora poniamo

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in [0, a] \\ -1 & \text{se } x \in [a, b] \\ u(x) & \text{se } x \in [b, 1] \end{cases}$$

e verifichiamo che $\hat{u} \in H^1((0,1))$ e vale

$$F(\hat{u}) < F(u)$$

$\uparrow$
in $[0, a]$ e $[b, 1]$ coincidono

in $[a, b]$ ho risparmio netto

Questo dice che u non era minimo.

Achtung! Cercare di capire perché sarebbe sbagliato definire

$$a := \inf \{ x \in [0, x_0] : u(x) \leq -1 \}$$

$$b := \sup \{ x \in [x_0, 1] : u(x) \leq -1 \}$$

CLAIM + raffinato

$$u(x) > -1 \text{ per ogni } x \in [0, 1] \\ u(x) < 0 \text{ per ogni } x \in (0, 1)$$

Supponiamo $u(x_0) = -1$ per qualche $x_0 \in (0, 1)$. Per quanto detto prima, x_0 sarebbe un pto di min. di $u(x)$, dunque $\dot{u}(x_0) = 0$. Inoltre u risolve ELE, cioè

$$(2\ddot{u} + 4\dot{u}^3)' = 4u^3 + 4$$

$$\begin{aligned} & 2\ddot{u} + 12\dot{u}^2\ddot{u} \\ & \leadsto \begin{cases} \ddot{u} = \frac{2(u^3+1)}{4(1+6\dot{u}^2)} \\ u(x_0) = -1 \\ \dot{u}(x_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Questo è un pbm. di Cauchy di Analisi 2, al quale si applica il teorema di esistenza ed unicità. Una soluzione del pbm è $u(x) \equiv -1$, ma allora è l'unica soluzione !!!

Stiamo usando il pbm. di Cauchy per una equ. del tipo

$$\ddot{u} = \Phi(x, u, \dot{u})$$

— o — o —

Prima variante : stesso risultato usando ELE invece del troncamento

Sia $u(x)$ un pto di min. e vogliamo dim. che $u(x) \geq -1$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Sappiamo che $u(x)$ risolve ELE : $\ddot{u} = \frac{2(u^3+1)}{6\dot{u}^2+1}$

Supponiamo che $u(x) < -1$ da qualche parte. Allora il min. di $u(x)$ in $[0, 1]$ viene assunto in un pto $x_0 \in (0, 1)$ e $u(x_0) < -1$

In quel pto $\ddot{u}(x_0) = 0$ e dall'eq. ricaviamo

$$\ddot{u}(x_0) = \frac{2(u(x_0)^3 + 1)}{1} < 0.$$

Ma nei pti di min $\ddot{u}(x_0)$ NON può essere < 0 .

Seconda variante: problema con sdo $u(0) = 0$, e vincolo in $x=1$.

Anche qui il claim è che $u(x) \geq -1$ sempre, e anzi $>$.

Via funzionale Ora basta porre

$$a := \sup \{x \in [0, x_0] : u(x) \geq -1\}$$

osservare che $0 < a < x_0$, e porre

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in [0, a] \\ -1 & \text{se } x \in [a, 1], \end{cases}$$

ed osservare che così si risparmia

Via equazione Il ragionamento di prima funziona se il punto di min x_0 sta in $(0, 1)$.

Il problema è che il pto di min potrebbe essere $x_0 = 1$.

Come si può aggiustare?

Noi sappiamo che $u(x)$ verifica

la NBC $\ddot{u}(1) = 0$, quindi se

fosse $u(1) < -1$ avremmo $\ddot{u}(1) < 0$,

il che è comunque un problema perché

basta guardare ad un intorno s_x di $+1$ in cui $\dot{u}(x)$ sarebbe strett. decresc., ma allora $\ddot{u}(x) > 0$ per x in un intorno di 1 ,

cioè $u(x)$ sarebbe cresc. strett. in un intorno s_x di $x=1$.

