

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 20

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Qualche risultato di compattezza

Compattezza via crescita e DBC

Supponiamo che la Lagrang. soddisfi una stima del tipo

$$L(x, s, p) \geq A |p|^\alpha - B |s|^\beta - C \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

dove A, B, C, α, β sono numeri reali con $A > 0$, $\alpha > \beta$, $\alpha > 1$

Allora ogni successione $\{u_n\}$ con

$$\int_a^b L(x, u_n, \dot{u}_n) dx \leq M_1$$

$$|u_n(\text{qualche parte})| \leq M_2$$

ammette una s. succ. f.c.

← bound sui funzionali

← bound sui valori in un qualche pto x_n , anche dipendente da n .

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ debole in } L^\alpha([a, b])$$

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ uniform.}$$

Dim Partiamo dalla solita (indichiamo con x_n la "qualche parte")

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x_n)| + |x_n - x|^{\frac{1}{\alpha}} \|u_n\|_{L^\alpha} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 1$$

$$\leq M_2 + M_3 \|u_n\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} |b-a|^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ora

$$M_1 \geq F(u_n) \geq \int_a^b (A |u_n|^\alpha - B |u_n|^\beta - C) dx$$

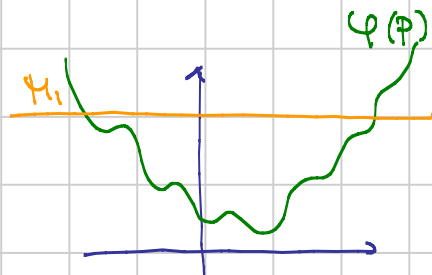
$$= A \|u_n\|_{L^\alpha}^\alpha - B \int_a^b (M_2 + M_3 \|u_n\|_{L^\alpha}^{\frac{1}{\alpha}})^{\beta} - C(b-a)$$

da cui

$$M_1 \geq A \|u_m\|_{L^\alpha}^\alpha - B(b-a) (M_2 + M_3 \|u_m\|_{L^\alpha})^\beta - C(b-a)$$

Questa è una disuguaglianza del tipo

$$\varphi(\|u_m\|_{L^\alpha}) \leq M_1$$



dove $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \varphi(p) = +\infty$ (qui ho usato che $A > 0$ e $\beta < \alpha$)

quindi ci permette di dedurre che $\|u_m\|_{L^\alpha} \leq M_1'$, da cui

$u_m \rightarrow v_\infty$ debole $L^\alpha(a,b)$ (qui usiamo $\alpha > 1$).

A questo p.to dalla stima su $u_m(x)$ deduciamo l'equi limit.
e concludiamo con A.A.

— o — o —

Achtung! Senza almeno un bound in un p.to non funziona
nulla (pensare all'esempio con $u^2 \neq u$)

— o — o —

Compattezza via media integrale Supponiamo che la Lagrang.
verifichi una stima del tipo

$$L(x, s, p) \geq A |p|^\alpha + g(s) - B \quad \forall x \in [a, b], \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

↑ Volendo può essere incluso in g

dove $A > 0$, $\alpha > 1$, e $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} g(s) = +\infty$

Allora ogni successione $\{u_m\}$ con $\int_a^b L(x, u_m, u'_m) dx \leq M$

ammette una s.succ. che converge al solito modo, cioè

$u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif., $u'_{n_k} \rightarrow u'_\infty$ debole L^α .

Dim. Essendo g limitata dal basso abbiamo anche che

$$L(x, s, p) \geq A|p|^\alpha - B_1 \quad \forall (x, s, p) \in \dots$$

e quindi

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \| \dot{u}_n \|_{L^\alpha} \leq M^1$$

Analogamente $L(x, s, p) \geq g(s) - B$, da cui

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(u_n) dx \leq M''$$

" $M + (b-a)B$

Per il teorema della media integrale

$$\exists x_n \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad g(u_n(x_n)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(u_n) dx \leq M''.$$

Sfruttando ora completamente che $g(s) \rightarrow +\infty$ per $s \rightarrow \pm\infty$, da questa deduciamo che

$$|u_n(x_n)| \leq M_4$$

Da qui otteniamo $|u_n(x)| \leq M_5$ per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal momento che abbiamo GIÀ una stima unif. su $\| \dot{u}_n \|_{L^\alpha}$, e dunque sulle costanti di Hölder.

Oss. Non abbiamo usato DBC, ma avevamo ipotesi molto più forti sulla Lagrangiana.

Esempio 1

$$F(u) = \int_0^\pi (\dot{u}^2 + \sin x \cdot u^4) dx,$$
$$G(u) = \int_0^\pi (\dot{u}^2 + \cos x \cdot u^4) dx.$$

Ammettendo minimo con DBC $u(0)=0$, $u(\pi)=3$?

Il primo ovviamente 😊 SI, il secondo ovviamente 😊 NO.

F(u) Metodo diretto quasi gratis

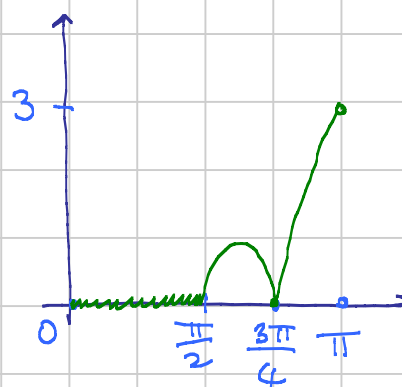
$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M \quad (\text{uso } \sin x \geq 0 \text{ in } [0, \pi])$$

↑ lo stesso

DBC $\leadsto$ stima su $|u_n(x)|$ $\leadsto$ e poi è storia.

G(u) L'idea è che $\cos x$ diventa negativo in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e a quel punto la quarta potenza vince sulla seconda

Consideriamo una funzione come in figura, e moltiplichiamo per n il tratto compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.
Più formalmente



$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ n v(x) & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \\ w(x) & \text{se } x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

(con $v(x)$ nulla agli estremi, ma $v(x) \equiv 0$)

↑
ad esempio la retta come in figura

È chiaro che $u_n \in H^1((0, \pi))$ e

$$G(u_n) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (n^2 v(x)^2 + \cos x \cdot n^4 v(x)^4) dx$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (w^2 + \cos x w^4) dx \quad \text{Fisso}$$

$$= n^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} v(x)^2 dx + n^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x \cdot v(x)^4 dx + \text{Fisso}$$

$\rightarrow -\infty$

numero negativo
e questo è il termine che
costruisce

Esempio 2 $F(u) = \int_0^7 \{ \sqrt{1+u^4} - \sqrt{1+u^2} \} dx$

$$G(u) = \int_0^7 \{ \sqrt{1+\dot{u}^2} - \sqrt{1+u^4} \} dx$$

Esiste il minimo in $C^1([0,7])$ con $u(0)=0$?

F(u) SI $L(x,s,p) = \sqrt{1+p^2} - \sqrt{1+s^2}$

$$\geq p^2 - |s| - 1$$

(ho usato che $\sqrt{1+s^2} \leq 1+|s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$)

A questo punto la compattatezza segue come nel 1° risultato grazie alla DBC. (Fondamentale che $2>1$)

G(u) NO Osserviamo che $L(x,s,p) \leq 1+|p| - s^2$.

Prendo una qualunque $\varphi \in C^1([0,7])$ con $\varphi(0)=0$ e pongo $\varphi \neq 0$

$$u_n(x) := n \varphi(x)$$

e osservo che

$$G(u_n) \leq \int_0^7 (1 + n|\dot{\varphi}(x)| - n^2 \varphi(x)^2) dx$$

$$= 7 + n \int_0^7 |\dot{\varphi}(x)| dx - n^2 \int_0^7 \varphi(x)^2 dx$$

$\rightarrow -\infty$

$\uparrow$ questo cancella

Variaute: $\rightarrow$ cosa succedeva con DBC $u(0)=7$

$\rightarrow$ cosa succedeva senza DBC?

— 0 — 0 —