

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 16

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

METODO DIRETTO

$$\min \left\{ \int_0^2 (u'^2 + \sin x \cdot u) dx : u(0) = 3 \right\}$$

Questo supremum benissimo farlo con il metodo indiretto

1 Formulazione debole

$$F(u) = \int_0^2 (u'^2 + \sin x \cdot u) dx \quad u \in \mathbb{X}$$

$\uparrow$ derivata debole

$$\mathbb{X} := \{ u \in H^1((0,2)) : u(0) = 3 \}$$

Devo osservare varie cose

- La DBC $u(0) = 3$ è ben definita in $H^1((0,2))$, perché sono funzioni continue e posso prendere i valori puntuali
(altre cond. date erano $u(0) = u(2)$, $u(0) = 3u(2) + 5$,
 $u(1) = 7$, $u(0) = u(1) = u(2) = 3$, $\int_0^2 u(x) dx = 7$)

ma NON posso mettere $u'(0) = 0$ o comunque condizioni puntuali sulle derivate prime)

- $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, perché gli integrali vengono finiti (qui occorre osservare che gli integrali hanno senso in H^1).

2 Compattità Considero la "solita" nozione di convergenza

$$u_n \rightarrow u_\infty$$

(unif. sulle funzioni)

$$u'_n \rightarrow u'_\infty$$

(debole L^2 sulle derivate)

Dimostro che ogni succ. $\{u_n\} \subseteq \mathbb{X}$ con $F(u_n) \leq M$ ammette s.succ. conv. in $\mathbb{X}$.

$$|u_m(x)| \leq |u_m(0)| + \int_0^x |\dot{u}_m(t)| dt$$

$$\leq |u_m(0)| + \sqrt{x} \left\{ \int_0^2 |\dot{u}_m(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

$\leq \sqrt{2}$

$$\leq 3 + \sqrt{2} \|\dot{u}_m\|_{L^2} \quad (*)$$

Quindi $M \geq F(u_m) = \int_0^2 \dot{u}_m dx + \int_0^2 u_m(x) \sin x dx$

$$\stackrel{(*)}{\geq} \|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 \geq - \int_0^2 |u_m(x)| dx$$

$$\geq \|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 - 2(3 + \sqrt{2} \|\dot{u}_m\|_{L^2})$$

↑
quadrato

↑
no quadrato
qui è entrata la DBC

cioè $\underbrace{\|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 - 2\sqrt{2} \|\dot{u}_m\|_{L^2}}_{\text{pol. 2° grado}} \leq M + 6$

↪ valori interni $\Rightarrow \|\dot{u}_m\|_{L^2} \leq M' \Rightarrow \boxed{\dot{u}_{m_k} \rightarrow v_\infty}$

Convergenza delle funzioni

Dico che le $\{u_m\}$ soddisfanno le ipotesi di A.A.

→ intervallo $[0, 2]$ compatto ☺

→ equicontinua in quanto equi $\frac{1}{2}$ -Hölder per la stima su $\|\dot{u}_m\|$

→ equilimitate grazie alla (*) (qui è fondamentale una DBC)

Quindi esiste $\dot{u}_{m_{k_i}} \rightarrow u_\infty$

↑
sottosucc. di quella trovata prima

Da qui, con il solito doppio scambio, deduco che $v_\infty = \dot{u}_\infty$, ma solo perché quella data da AA è s.succ. di quella data dalla compattatezza debole delle palle.

Osservo che la DBC $u_m(0) = 3$ passa al limite per conv. unif., dunque $u_\infty(0) = 3$ e $u_\infty \in \mathbb{X}$.

Supponiamo di aver voluto fare le cose strane 😊, ambientando il pbm in

$$\hat{X} := \{u \in W^{1,3/2}((0,2)) : u(0) = 3\}$$

Andava abbastanza bene purché

- il valore puntuale $u(0) = 3$ è ben definito
- $\int u \sin x$ è ben def., in quanto u è continua
- $\int \dot{u}^2$ è ben definito in $W^{1,3/2}$, a patto di ammettere il valore $+\infty$, quindi

$$F : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

↑ forse sarebbe $\hat{F}$

In fase di opt., prendevo come nozione di conv.

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif. in } [0,2]$$

$$i_n \rightarrow i_\infty \text{ debolmente in } L^{3/2}((0,2))$$

(volendo potevo anche chiedere in $L^{5/4}$ 😊)

Ottenendo s. succ. conv. ?

Osservo che $|x|^{3/2} \leq x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$\int_0^2 |\dot{u}|^{3/2} dx \leq \int_0^2 (\dot{u}^2 + 1) \leq \int_0^2 \dot{u}^2 + 2$$

Come prima

$$|u_n(x)| \leq |u_n(0)| + \int_0^x |\dot{u}_n(t)| dt$$

$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$

$$\leq 3 + \left\{ \int_0^2 |\dot{u}_n(t)|^{3/2} dt \right\}^{2/3} \left\{ \int_0^2 1^3 dt \right\}^{1/3}$$

$$\leq 3 + \sqrt[3]{2} \cdot \|\dot{u}\|_{L^{3/2}}$$

e quindi

$$\int_0^2 \sin x \cdot u_n(x) dx \geq -6 - \sqrt[3]{2} \|\dot{u}\|_{L^{3/2}}$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} M \geq F(u_m) &= \int_0^2 \dot{u}_m^2 + \int_0^2 u_m \sin x \\ &\geq \|\dot{u}_m\|_{L^{3/2}}^{3/2} - 2 - 6 - 2\sqrt[3]{2} \|\dot{u}\|_{L^{3/2}} \end{aligned}$$

$$|x|^{3/2} - 2\sqrt[3]{2}|x|$$

da cui

$$\|\dot{u}_m\|_{L^{3/2}}^{3/2} - 2\sqrt[3]{2} \|\dot{u}\|_{L^{3/2}} \leq M + 8$$



$$\Rightarrow \|\dot{u}_m\|_{L^{3/2}} \leq M'$$

$$\Rightarrow \exists \dot{u}_{m_k} \rightharpoonup \dot{v} \text{ debole } L^{3/2}((0,2)) \text{ e anche } \frac{5}{4} \text{ ☺}$$

Ora immergo A.A. con la $\frac{1}{3}$ -Hölderianità e concludo come prima.

[3] SCI. Se ho impostato in $\mathbb{X}$, è la SCI della norma sulla parte di funzione e la continuità dell'integrale risp. conv. unif. sulla parte di funzione.

Se avevo scelto $\hat{\mathbb{X}}$, allora sulla parte $\int_0^2 \sin x \cdot u_m(x) dx$ era uguale (conv. unif.)

Sulla parte di derivata segue dal fatto generale

$$\dot{u}_m \rightharpoonup \dot{u}_\infty \text{ (basta } L^1 \text{ debole)} \Big\} \Rightarrow \liminf \int_0^2 \varphi(\dot{u}_m) \geq \int_0^2 \varphi(\dot{u}_\infty)$$

φ è convessa

[4] Regolarità fino a C^∞ e nascita della NBC in $x=2$ funzionano come sempre

Variaute: potrei ambientare in $W^{1,4}$?

PBC e integrali non danno problemi, addirittura con valori in $\mathbb{R}$

In fase di compattezza, dipende dalla nozione di convergenza

Scenario 1 $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole L^4

Qui andava male, perché da $F(u_n) \leq M$ non è possibile avere un bound su $\|\dot{u}_n\|_{L^4}$, o per lo meno non è ovvio.

(La formulazione NON è abbastanza debole per avere cpt, nel senso che $W^{1,4}$ è troppo "piccolo", cioè con troppo poche succ. convergenti da immettere la coercività).

Scenario 2 $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole L^2 (o anche L^1)

Qui funziona tutto apparentemente bene, nel senso che trovo s.succ. $\dot{u}_{n_k} \rightarrow v_\infty$ debole L^2 . Nessuno però mi può garantire che $v_\infty \in L^4$ (servirebbe un equibound $\|\dot{u}_n\|_{L^4} \leq M'$, ma allora si torna ai guai dello scenario 1).

Quindi in $W^{1,4}$ le cose vanno male, e così in ogni $W^{1,p}$ con $p > 2$. Per essere precisi: uno avrebbe SCI, ma NON CPT. Per $p \leq 2$ invece tutto ok.

— o — o —