

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 15

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$. Per quali $p \geq 1$ si ha che $f \in W^{1,p}((0,1))$?

Brutal mode: probabilmente $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ è la derivata debole, quindi

$$f'(x) \in L^p \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{p/2}} dx \text{ converge} \Leftrightarrow p < 2$$

Verifichiamo che f' è la derivata debole

$$\int_0^1 \sqrt{x} \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

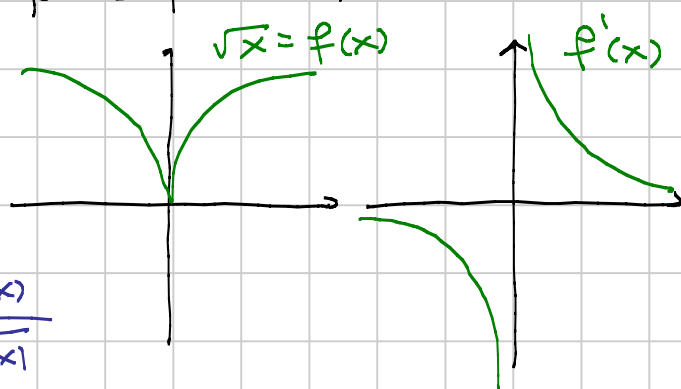
Avendo φ supp. cpt., possiamo trovare $0 < a < b < 1$ tale che $\varphi \equiv 0$ fuori di (a,b) , quindi gli int. sono in realtà in (a,b) , e lì vale l'integr. per parti tra funzioni C^∞ . I termini di bordo se ne vanno.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $(-1,1)$. È vero che $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ per x pari, estesa poi per disparità?

[SI] Per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$ deve valere

$$\int_{-1}^1 |x|^{1/2} \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} + \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}}$$

Ancora se $\varphi(0) \neq 0$, questi integrali hanno senso



$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{-1}^{-\varepsilon} \dots + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dots + \int_{\varepsilon}^1 \dots \quad (\text{integr. primo e ultimo per parti}) \\ &= [|x|^{1/2} \varphi(x)]_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dots + [|x|^{1/2} \varphi(x)]_{\varepsilon}^1 + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\varepsilon^{1/2} \varphi(-\varepsilon)}_{\downarrow 0} + \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dots}_{\downarrow 0} - \underbrace{\varepsilon^{1/2} \varphi(\varepsilon)}_{\downarrow 0} + \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}} dx - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} dx \\
&\quad \text{(integrale di una funzione limitata)} \qquad \qquad \qquad \downarrow \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}} dx - \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} dx \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(volendo per defn. di integrale improprio)} \\
&= \text{RHS.}
\end{aligned}$$

Esempio 3 Siano u e v in $L^1_{\text{loc}}((-1,1))$ (o volendo anche L^∞)
 Supponiamo che

$$\int_{-1}^1 u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$ tale che $\varphi(0) = 0$.

restrizione rispetto alla solita classe

Domanda: possiamo concludere che v è la deriv. debole di u ?

Risposta: **NO** (N.B. possiamo concludere che v è la deriv. debole di u in $(-1,0)$ e in $(0,1)$, NON in $(-1,1)$)

Prendiamo $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad v(x) \equiv 0$

$$\text{LHS} = \int_{-1}^1 u(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi'(x) dx = \underbrace{\varphi(1)}_0 - \underbrace{\varphi(0)}_0 = 0 = \text{RHS.}$$

Esempio 4 Stessa cosa imponendo come classe $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$ tali che $\varphi(0) = 0$.

La convoluzione è lineare, quindi vale l'uguaglianza non appena $\varphi(0) \neq 0$. Ma anche se φ nulle in 0 sono differenza di 2 φ non nulle: $\varphi(x) = (\varphi(x) + \psi(x)) - \psi(x)$ scegliendo una qualunque $\psi \in C_c^\infty((-1,1))$ con $\psi(0) \neq 0$

Formula di integrazione per parti (Estensione della relazione nella def. di derivata debole)

Siano f e g in $W^{1,1}((a,b))$ (se stanno in qualche altro $W^{1,p}((a,b))$, ancora meglio)

Allora vale la classica formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

dove

- f' e g' sono le derivate DEBOLI
- gli integrali hanno senso perché f e g sono limitate
- i valori di f e g al bordo (e non solo) sono ben definiti perché si tratta di funzioni continue (detto meglio: nella classe di f e g c'è un unico rappresentante continuo)

Dim Quasi ovvia a partire dalla definizione H, quasi impossibile a partire dalla W.

Per la def H, esistono $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ di classe C^∞ t.c.

$f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ (in L^1 , ma pure uniform.)

$f'_n \rightarrow f'$ e $g'_n \rightarrow g'$ in L^1

Per ogni n vale la formula classica

$$\begin{array}{ccccc} \int_a^b f_n g'_n dx & = & f_n(b)g_n(b) - f_n(a)g_n(a) & - & \int_a^b f'_n g_n dx \\ \downarrow & & \downarrow \text{conv. unif. in } [a,b], \text{ bordo compreso} & & \downarrow \text{conv. unif.} \times \text{conv. } L^1 \\ \int_a^b f g' dx & & f(b)g(b) - f(a)g(a) & - & \int_a^b f' g \end{array}$$

$$\int f_n g'_n - \int f g' = \underbrace{\int f_n}_{\text{limitato}} \underbrace{(g'_n - g')}_{\downarrow L^1 \atop 0} - \underbrace{\int (f - f_n) g'}_{\leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}} \uparrow \text{Fisso}$$

Derivata del prodotto Se f ha derivata debole f' in (a,b)
 g " " " g' in (a,b)
 allora fg ha derivata debole $f'g + fg'$ in (a,b)

(Supponiamo $f, g, f', g' \in L^1_{loc}((a,b))$).

Dim Intanto f e g sono in realtà $C^0((a,b))$, non necessariamente fino al bordo dato il "loc" sulle derivate (ad esempio $\frac{1}{x}$ ha derivata debole $-\frac{1}{x^2}$ in $(0,1)$, ma qui ci vogliono i loc).

Questo basta per dedurre che fg e $f'g + fg'$ stanno in $L^1_{loc}((a,b))$, e anzi $fg \in C^0((a,b))$.

Per def. H abbiamo $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ unif. sui cpt. $\subseteq (a,b)$

$f'_n \rightarrow f'$ e $g'_n \rightarrow g'$ in $L^1((c,d))$ per ogni $(c,d) \subset\subset (a,b)$

A n fisso abbiamo derivate classiche, cioè per ogni $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$

$$\int_a^b f_n(x) g_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b (f'_n(x) g_n(x) + f_n(x) g'_n(x)) \varphi(x) dx$$

e tutto passa al limite, dal momento che possiamo restringerci ad un sottointervallo $(c,d) \subset\subset (a,b)$ che contiene comunque tutto il supporto di φ .

MORALE

La def. W è comoda per passare al limite
 La def. H " " per fare i conti, e ottenere formule.

Esercizio Allo stesso modo si vede che se f' è deriv. debole di f , allora $siu f$ ha deriv. debole, e questa è $\cos f \cdot f'$.

Rincollamento Siano $f \in L^1((0,3))$, $g_1 \in L^1((0,2))$, $g_2 \in L^1((1,3))$.

Supponiamo

(i) g_1 è derivata debole di f in $(0,2)$

(ii) g_2 " " " " " $(1,3)$

Allora

- $g_1 \equiv g_2$ (quasi ovunque) in $(1,2)$
- f è derivabile debolmente su $(0,3)$ e la sua derivata è quello che ci aspettiamo.

Dimi Per ogni $\varphi \in C_c^\infty((1,2))$ vale

$$\begin{aligned} \int_1^2 g_1(x) \varphi(x) dx &= \int_0^2 g_1(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 f(x) \varphi'(x) dx \\ &\quad \uparrow \text{ } g_1 = f' \text{ in } (0,2) \\ &= \int_0^2 g_2(x) \varphi(x) dx = \int_1^3 g_2(x) \varphi(x) dx \\ &\quad \uparrow \text{ } g_2 = f' \text{ in } (1,3) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \int_1^2 (g_2(x) - g_1(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \dots \text{FLCV} \dots$$

Detto g il "rincollamento" di g_1 e g_2 , fissata $\varphi \in C_c^\infty((0,3))$

$$\int_0^3 f(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{3/2} f(x) \varphi'(x) dx + \int_{3/2}^3 f(x) \varphi'(x) dx$$

$$\int_0^{3/2} f(x) \varphi'(x) dx = \cancel{f(\frac{3}{2}) \varphi(\frac{3}{2})} - \int_0^{3/2} g_1(x) \varphi(x) dx$$

$$\int_{3/2}^3 f(x) \varphi'(x) dx = - \cancel{f(\frac{3}{2}) \varphi(\frac{3}{2})} - \int_{3/2}^3 g_2(x) \varphi(x) dx$$

[Estremi di integrazione sistemati dopo video]

Ho usato l'integrazione per parti estesa

da cui la tesi. [Alternativa: scrivere φ come somma di φ_1 e φ_2 con supporti in $(0,2)$ e $(1,3)$, rispettivamente]
— 0 — 0 —