

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 14

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

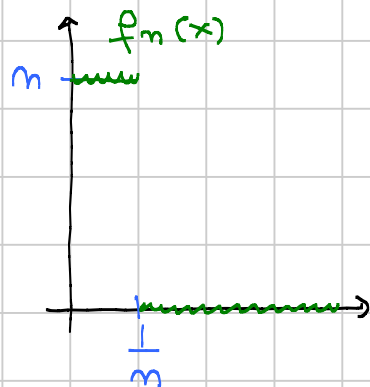
Note Title

06/10/2020

Esempi ulteriori di convergenza debole

Esempio 1 $(0,1)$ con misura di Lebesgue

$$f_n(x) = n \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})}(x)$$



Per $p > 1$, abbiamo che $\|f_n\|_{L^p((0,1))} = \{n^{p-1}\}^{\frac{1}{p}}$
 $\downarrow +\infty$

quindi manca la limitatezza, quindi non può conv. debolmente.

Domanda: possiamo esibire $g \in L^q$ tale che $\int_0^1 f_n g$ non converga a nulla?

I pbm. sono in $x=0$, proviamo ad usare le solite $g(x) = \frac{1}{x^a}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) \frac{1}{x^a} dx &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x^a} dx = n \left[x^{1-a} \right]_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1-a} \\ &= \frac{1}{1-a} n \frac{1}{n^{1-a}} = \frac{n^a}{1-a} \rightarrow +\infty \quad \forall a \in (0,1) \end{aligned}$$

D'altra parte $g(x) \in L^q \Leftrightarrow aq < 1$, cioè $a < \frac{1}{q}$.

Fissato $p > 1$, troviamo $q \in (1, +\infty)$ (reale), quindi troviamo a positivi con $a < \frac{1}{q}$, e questo è quello che ci serve.

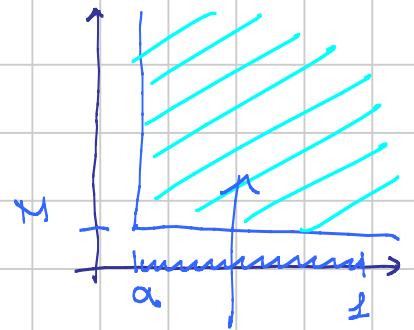
Conclusione: NO conv. debole in L^p per $p > 1$.

Per $p=1$ abbiamo che $\{f_n(x)\}$ è limitata in L^1 , quindi non ci sono ostruzioni alla convergenza debole.

Se ci fosse un limite debole, questo sarebbe $\equiv 0$.

Supponiamo $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 , e supponiamo $f_\infty \neq 0$, diciamo wlog $f_\infty(x) \geq M > 0$ su un insieme A di misura > 0 . Possiamo anche supporre che $A \subseteq (a, 1)$ per un qualche $a > 0$.

Considero come $g \in L^\infty$ la caratteristica di questo A . Allora



f_∞ sta qua su un insieme di misura positiva

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) g(x) dx &\rightarrow \int_0^1 f_\infty(x) g(x) dx \\ \int_A f_n(x) dx &\int_A f_\infty(x) dx \\ &\quad \text{per } n \text{ grande} \\ &\quad \text{con appena } \frac{1}{n} < a \end{aligned}$$

$M \cdot \text{meas}(A)$

Quindi l'unica possibilità è che $f_n \rightarrow 0$, ma allora ho un assurdo usando $g \equiv 1$.

Dim. alternativa Osserviamo che, se $g(x)$ è continua, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} g(x) dx = g(0)$$

(esercizio analisi 1)

Quindi il fantomatico limite debole f_∞ dovrebbe soddisfare

$$\int_0^1 f_\infty(x) g(x) dx = g(0) \quad \forall g \in C^0([0, 1])$$

Una tale $f_\infty(x) \in L^1$ non esiste. Già visto 1000 volte, ma facciamo 1001...

Usiamo g_n come in figura



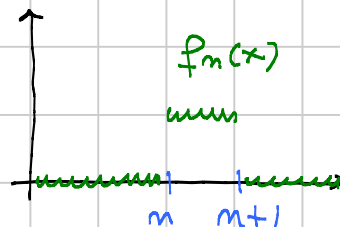
Allora ensemble continuo

$$1 = g_n(0) = \int_0^1 f_n(x) g_n(x) dx$$

$\downarrow \nearrow$ per convergenza puntuale
dominata da $|f_n(x)|$

Esempio 2 $(0, +\infty)$ con misura di Lebesgue

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$$



È ovvio che $f_n(x)$ non ha limite forte in nessun L^p (il limite dovrebbe essere 0).

Ha limite debole in qualche L^p ??

SI, per ogni $p > 1$

(Ossiglio: $\mu(X) = +\infty$, quindi non vi è nessuna inclusione tra gli spazi L^p , e quindi nessuna implicazione tra conv. deboli)

① Per $p > 1$ si ha che $\int_0^{+\infty} f_n(x) g(x) dx \rightarrow 0$ banalmente

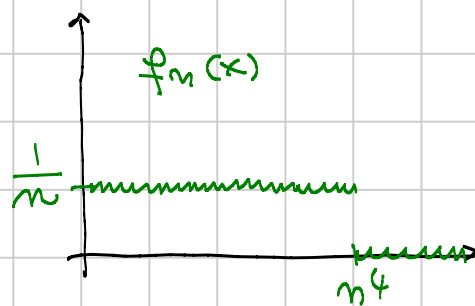
per ogni g che è caratteristica di intervallo, e queste spaziano un denso in L^q se $q < +\infty$
(nota: NON spaziano un denso in L^∞)

② Per $p=1$, f_n non converge debole a 0. Basta scegliere $g(x) \equiv 1$ (e questa sta in L^∞).

③ Per $p=1$, f_n non converge debole a qualcosa $\neq 0$.
Altrimenti esisterebbero A limitato e $M > 0$ (wlog) t.c.
 $\mu_n(A) > 0$ e $f_n(x) \geq M$ per ogni $x \in A$.
Ora uso come $g(x)$ la caratteristica di A .

Esempio 3 $(0, +\infty)$ con Lebesgue

Domanda: $f_n(x)$ converge a qualcosa in qualche senso?



Studiamo intanto la limitatezza

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p dx = n^4 \cdot \frac{1}{n^p}$$

→ Se $p > 4$, allora $f_n(x) \rightarrow 0$ in L^p forte (quindi a maggior ragione debole)

→ Se $p < 4$, allora $\{f_n\}$ non è limitata in L^p , quindi non può convergere nemmeno debolmente

Sarebbe interessante trovare una g esplicita che fa andare male le cose (provare con $g(x) = \frac{1}{(x+1)^a}$)

→ Se $p = 4$, allora $\|f_n\|_{L^p} \equiv 1$, quindi la conv. debole è possibile. Teoricamente anche quella forte.

FORTE NO: il limite puntuale è 0 e questo dovrebbe coincidere con il limite forte, ma allora $\|f_n\|_{L^p}$ dovrebbe andare a 0, il che non avviene,

DEBOLE SI: dico che $f_n \rightarrow 0$ in $L^4((0, +\infty))$.
Devo dire che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) g(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^q = L^{4/3}$$

Basta farlo per le caratteristiche di intervalli che in $L^{4/3}$ spaziano un denso.

— 0 — 0 —

Esempio 4 (a,b) intervallo con Lebesgue

convergenza unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale

conv. unif. $\Rightarrow$ conv. L^p forte in ogni $L^p \Rightarrow$ conv. debole

conv. debole $\nRightarrow$ conv. puntuale

conv. forte $\Rightarrow$ conv. puntuale quasi ovunque (ma solo di una sotto succ.)

Se $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente (q.o.)

e $f_n \rightarrow g_\infty$ debole di qualche tipo,

posso concludere che $f_\infty = g_\infty$??

A meno di sottrarre, posso supporre $f_\infty \equiv 0$ oppure $g_\infty \equiv 0$.

Supponiamo $f_\infty \equiv 0$. Allora

$$\int_a^b f_n(x) g(x) dx \rightarrow \int_a^b g_\infty(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^q(a,b)$$

$\downarrow$ (puntuale dominata
da $|g(x)| \in L^1$ perchè $g \in L^q \Rightarrow g \in L^1$)

Questo ci dice che $\int_a^b g_\infty(x) g(x) dx = 0$ per ogni $g \in L^q$

[Due g_∞ aggiunti dopo video]

e questo imnesca FLCT.

Domanda: serve davvero che la misura sia finita?

— 0 — 0 —