

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 13

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

CONVERGENZA DEBOLE (in $L^p(X, m, \mu)$)

Def. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X, m, \mu)$ e sia $f_\infty \in L^p(\dots)$.

Si dice che $f_n \rightarrow f_\infty$ se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) g(x) d\mu = \int_X f_\infty(x) g(x) d\mu \quad \forall g \in L^q(\dots)$$

Questo vale se $p \in [1, +\infty)$; nel caso $p = +\infty$ si indica $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$ (il motivo della $*$ si vede nella terza parte del corso)

Fatti fondamentali

- ① Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p , allora $\{f_n\}$ è limitata in L^p (idem per la $*$)
- ② Se $\{f_n\}$ è limitata in L^p , allora esiste $f_{n_k} \rightarrow f_\infty \in L^p$ [Aggiunto dopo video]
- ③ Se $\mu(X) < +\infty$, allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^p \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^r \quad \forall r \leq p$$

Quindi in questo caso $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 è la più debole di tutte, mentre $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$ in L^∞ è la più forte tra le deboli.

- ④ Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p , allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n(x)|^p d\mu \geq \int_X |f_\infty(x)|^p d\mu$$

- ⑤ Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 (la più debole di tutte) e φ è convessa, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_X \varphi(f_\infty(x)) d\mu.$$

Esempio 1 $X = (a, b)$ con misura di Lebesgue

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

Per quali p ammette limite debole in L^p ?

Già visto nel caso $(a, b) = (0, \pi)$ e $p = 2$.

La cosa vale in generale. Mostriamo che $\sin(nx) \xrightarrow{*} 0$ in $L^\infty((a, b))$.

Devo dim. che

$$\int_a^b \sin(nx) g(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^1((a, b))$$

Fatto importante: se $\{f_n\}$ è limitata in L^p , allora la conv. debole basta testarla su una classe di funzioni di test che spazza un denso in L^q

In questo caso prendiamo $g = \mathbb{1}_{[c, d]} =$ funzione caratteristica di $(c, d) \subseteq (a, b)$ e banalmente

$$\int_a^b \sin(nx) g(x) dx = \int_c^d \sin(nx) dx = \frac{1}{n} [\cos(nx)]_{x=c}^{x=d} \rightarrow 0$$

Essendo (a, b) di misura finita, vale che

$$\sin(nx) \xrightarrow{*} 0 \text{ in } L^\infty \Rightarrow \sin(nx) \rightarrow 0 \text{ in } L^p \quad \forall p \geq 1$$

Esempio 2 (a, b) come sopra, $f_n(x) = \sin(\sqrt{n}x)$

Anche in questo caso $f_n(x) \rightarrow 0$ in ogni L^p

Dimostrazione come sopra, solo che nella primitiva esce $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Oss. Più in generale $\sin(ax) \rightarrow 0$ se $|a| \rightarrow +\infty$ in ogni $L^p((a, b))$ (debole, MAI FORTE)

Esempio 3 (a,b) come sopra, $f_n(x) = \sqrt{n} \sin(nx)$
Converge debole a qualcosa in qualche L^p ?

[Un po' visto quando abbiamo considerato $\sqrt{n}$ en in sp. di H.]

Non può convergere debole, perché NON è limitata in nessun L^p .
Basta verificare, ensemble (a,b) limitato, per $p=1$.

$$\int_a^b |f_n(x)| dx = \sqrt{n} \int_a^b |\sin(nx)| dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{na}^{nb} |\sin(y)| dy \xrightarrow{+\infty}$$

$\uparrow$
 $nx=y$
 $dx = \frac{1}{n} dy$

$\sim \frac{2}{\pi} (b-a) n$
(eserc. analisi 1)

Nessuna s.succ. è limitata $\Rightarrow$ nessuna s.succ. può conv. deb.

Nel caso $p=2$, esibire esplicitamente una $g \in L^2$ t.c.

$$\int_a^b \sqrt{n} \sin(nx) g(x) dx \rightarrow 0$$

[Oss. preliminare: se il limite debole esistesse sarebbe 0, almeno nel caso in cui $(a,b) = (0,\pi)$ perché il limite delle componenti sarebbe 0]

Poniamo

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k^2 x)$$

[ricorda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_{k^2}$]
[converge perché $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$]

Nel caso $(a,b) = (0,\pi)$ abbiamo

$$\int_a^b \sqrt{n} \sin(nx) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(k^2 x) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ non è un } \square \text{ perfetto} \\ i & \text{se } n = i^2 \end{cases}$$

e questa non tende a 0.

Se l'intervallo è (a,b) generico, dovrebbe venire uguale, solo con qualche termine di bordo in più.

Esempio 4 (a,b) come sempre.

Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p , cosa possiamo dire di $f_n \cdot \varphi$?

Cautela: Intanto deve essere definito. Diciamo $\varphi \in C^0([a,b])$.
Questo garantisce $f_n \cdot \varphi \in L^p$. (Uso che φ è limitata)

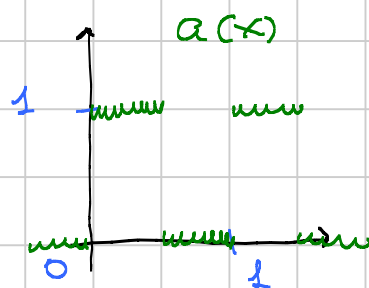
CLAIM: $f_n \varphi \rightarrow f_\infty \varphi$ nello stesso L^p

Devo dire che $\int_a^b f_n \underbrace{\varphi g}_{\hat{g} \in L^q} dx \rightarrow \int_a^b f_\infty \underbrace{\varphi g}_{\hat{g} \in L^q} dx \quad \forall g \in L^q$
quindi è vero

Oss. Ho usato solo che $\varphi \in L^\infty((a,b))$.

Esempio 5 La conv. debole non ha nulla a che fare con la puntuale, ad esempio

$$a(nx) \xrightarrow{*} \frac{1}{2} \quad \text{in } L^\infty((a,b)) \\ (\text{e quindi in } L^p((a,b)))$$



Domanda: se $f_n(x) \leq 7$ per ogni $x \in (a,b)$ e $f_n \rightarrow f_\infty$ in $L^p((a,b))$, è possibile che $f_\infty(x) > 7$ da qualche parte? (su un insieme di misura positivo?)

La risposta è NO: il limite debole può avere solo valori "intermedi".

la dim. basta farlo per la conv. debole L^1 , almeno nel caso di insiemi di misura finita.

Dim 1 Supponiamo che esista $M > \tau$ tale che, posto

$$S_M := \{x \in (a,b) : f_\infty(x) \geq M\}$$

si abbia $\text{meas}(S_M) > 0$.

[Nota: se

$$\text{meas}(\{x \in (a,b) : f_\infty(x) > \tau\}) > 0,$$

allora esiste $M > \tau$ t.c. $\text{meas}(S_M) > 0$, in quanto

$$\{x \in (a,b) : f_\infty(x) > \tau\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\tau + \frac{1}{n}} \quad]$$

Poniamo $g =$ caratteristica di S_M e osserviamo che

$$\int_a^b f_n(x) \cdot g(x) dx = \int_{S_M} f_n(x) dx \leq \tau \text{meas}(S_M)$$

$\downarrow$
 $f_n \leq \tau$ ovunque

$$\int_a^b f_\infty(x) \cdot g(x) dx = \int_{S_M} f_\infty(x) dx \geq M \text{meas}(S_M)$$

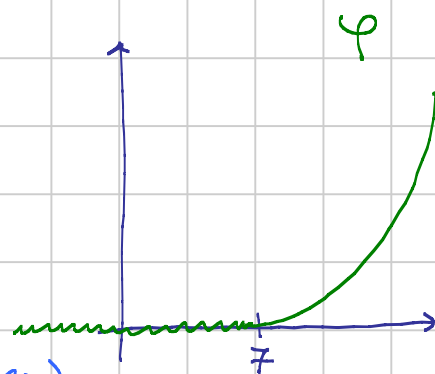
Mettendo insieme $M \text{meas}(S_M) \leq \tau \text{meas}(S_M)$ che è assurdo se $\text{meas} > 0$.

Dim 2 Considero φ convessa come in figura.

Osservo che

$$\int_a^b \varphi(f_n(x)) dx = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$
(perché $f_n(x) \leq \tau$ sempre)



D'altra parte

$$0 \leq \int_a^b \varphi(f_\infty(x)) dx \stackrel{\varphi \text{ convessa}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(f_n(x)) dx = 0$$

$\Rightarrow \varphi(f_\infty(x)) \equiv 0 \Rightarrow f_\infty(x) \leq \tau$ tramite l'insieme di mis. nulla.