

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 12

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Sia H uno sp. di Hilbert, e siano V e W due s.sp. vet. chiusi con $V \cap W = \{0\}$.

Possiamo concludere che $V \oplus W$ è un s.sp. chiuso?

Risposta 1 Se V e W sono ortogonali, allora la risposta è Sì.
Quindi assumiamo $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $v \in V$, per ogni $w \in W$.

Cosa dobbiamo dimostrare? Siano $\{v_n\} \subseteq V$ e $\{w_n\} \subseteq W$.

Supponiamo che $v_n + w_n \rightarrow z_n \in H$.

Possiamo concludere che $z_n \in V \oplus W$?

Idea: ci piacerebbe tanto che $v_n \rightarrow v_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$. A quel p.to avremmo $v_\infty \in V$ e $w_\infty \in W$ per chiusura e quindi $z_\infty = v_\infty + w_\infty \in V \oplus W$.

Tutto quindi si riduce a dimostrare che $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ hanno limite in H , quindi che sono di Cauchy.

Questo segue dalla stima

$$\|v_n - v_m\|^2 + \|w_n - w_m\|^2 = \|(v_n + w_n) - (v_m + w_m)\|^2$$

↑
qui uso somma diretta ortogonale

Essendo $\{v_n + w_n\}$ di Cauchy in H , se ne deduce che pure $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ lo sono.

Domanda: cosa succede se H è soltanto pre-Hilbert?
(Non possiamo usare le succ. di Cauchy)

Risposta 2 Se V e W sono "abbastanza ortogonali", allora ancora SI.

Diciamo che sono abb. ortog. se esiste $\nu < 1$ tale che

$$|\langle v, w \rangle| \leq \nu \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

(è una specie di CS penalizzata: geometricamente $\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}$ è il coseno dell'angolo compreso tra v e w , e tale angolo si mantiene lontano da 0° e 180°)

Guardando bene la dim. prec., il p.to essenziale era ottenere qualcosa del tipo

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$$

(questa si usava con $v = v_n - v_m, w = w_n - w_m$)

In realtà sarebbe bastato

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 \leq M \|v + w\|^2 \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

per una opportuna costante M . Non è che è vero in questo caso?

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 \leq M \|v + w\|^2 \Leftrightarrow \|v\|^2 + \|w\|^2 \leq M (\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(M-1)\|v\|^2 + (M-1)\|w\|^2 + 2M\langle v, w \rangle}_{\text{LHS}} \geq 0$$

Ora sappiamo che

$$2M\langle v, w \rangle \geq -2M|\langle v, w \rangle| \geq -2M\nu\|v\| \cdot \|w\|$$

e quindi

$$\text{LHS} \geq (M-1)^2\|v\|^2 + (M-1)\|w\|^2 - 2M\nu\|v\| \cdot \|w\| \stackrel{?}{\geq} 0$$

L'ultima disug è vera se la forma quadratica di matrice

$$\begin{pmatrix} M-1 & -Mv \\ -Mv & M-1 \end{pmatrix} \text{ è definita positiva, il che accade se e solo se } M > 1 \text{ e } (M-1)^2 - M^2 v^2 > 0$$
$$M^2 - 2M + 1 - M^2 v^2 > 0$$
$$(1-v^2) M^2 - 2M + 1 > 0$$

Essendo $|v| < 1$, per M abbastanza grande questa è verificata! Questo basta per concludere.

Risposta 3 Nel caso generale è FALSO (in dim. infinita)

Esempio: prendiamo il solito H separabile con base Hilbertiana $\{e_n\}$

Poniamo $V := \text{Clos}(\text{Span}(e_0, e_2, e_4, e_6, \dots))$

$$W := \text{Clos}(\text{Span}(e_0 + e_1, e_2 + \frac{e_3}{3}, e_4 + \frac{e_5}{5}, e_6 + \frac{e_7}{7}, \dots))$$

[Verificare per allenamento che non sono abbastanza ortogonali]

Dico che gli elementi di V sono tutti e soli quelli del tipo

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{2i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < +\infty$$

e analogamente gli elementi di W sono quelli del tipo

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(e_{2i} + \frac{e_{2i+1}}{2i+1} \right) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 < +\infty.$$

Voglio trovare $v_n + w_n \rightarrow z_\infty \in H$, ma $\notin V \oplus W$.

Chi è $\text{Clos}(V \oplus W)$? È tutto H ! Basta osservare che $e_i \in V \oplus W$ per i pari, ma anche per i dispari!

Quindi

$$z_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_{2i+1}}{2^{i+1}} \in H = \text{Clos}(V \oplus W).$$

Verifichiamo che $z_\infty \notin V \oplus W$.

Idea: l'unico modo di scriverlo è usare tutti gli elementi della base di W con coeff 1, e questo è un grosso problema!!

$$\text{Se } z_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_{2i+1}}{2^{i+1}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{2i}}_{\in V} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(e_{2i} + \frac{e_{2i+1}}{2^{i+1}} \right)}_{\in W}$$

Facendo il prodotto scalare con un generico e_{2k+1} troviamo

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{b_{2k+1}}{2^{k+1}}, \text{ da cui } b_{2k+1} = 1$$

[Verificare per bene come si scrivono gli elementi di W].
— 0 — 0 —

Esempi di convergenza debole

Esempio 1 Prendiamo $\{\sin(mx)\} \subseteq L^2((0,1))$.

Dico che $\sin(mx) \rightarrow 0$.

Dovrei dimostrare che $\int_0^1 \sin(mx) g(x) dx \rightarrow 0$
per ogni $g \in L^2((0,1))$.

Con un facile conto verifico che $\|\sin(mx)\|_{L^2((0,1))}$ sono equilimitate.

Quindi basta fare la verifica per ogni $g \in W$, dove $W \subseteq L^2((0,1))$ è un sottoinsieme che spanna un denso.

Scelgo bene W , ad esempio le funzioni caratteristiche di intervalli (le step functions sono dense in $L^2((0,1))$).

Per ogni $(a,b) \subseteq (0,1)$ vale

$$\int_0^1 \sin(mx) \underbrace{\mathbb{1}_{(a,b)}(x)}_{\substack{\uparrow \text{1 su } (a,b) \text{ e } 0 \text{ fuori}}} dx = \int_a^b \sin(mx) dx = \left(\frac{1}{m} \right) [\cos(mx)]_{x=a}^{x=b}$$

Esempio 2 Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica (e continua, così stiamo tranquilli).

Calcolare il limite debole (se esiste) di

$$f_n(x) := \varphi(nx) \quad \forall x \in (0,1)$$

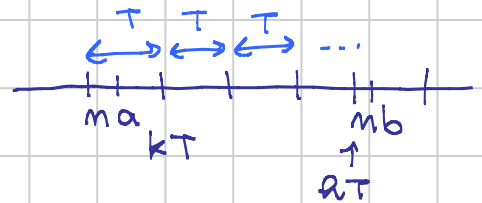
Brutalmente: $f_n(x)$ oscilla come $\varphi(x)$, ma molto più furiosamente. L'idea è che in media sia uguale a

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(s) ds = \text{media di } \varphi(x) \text{ su un periodo } [0, T]$$

Esattamente come prima, ci riduciamo ad usare come $g(x)$ le funzioni caratteristiche

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(nx) dx = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} \varphi(y) dy$$

$\uparrow$
 $y = nx$
 $dx = \frac{1}{n} dy$



Ora

$$\int_{na}^{nb} \varphi(y) dy = \underbrace{\int_{na}^{kT} \varphi}_{\text{first partial period}} + \underbrace{\int_{kT}^{(k+1)T} \varphi + \int_{(k+1)T}^{(k+2)T} \varphi + \dots + \int_{(k-1)T}^{kT} \varphi}_{\text{full periods}} + \underbrace{\int_{(k-1)T}^{nb} \varphi}_{\text{last partial period}}$$

Il primo e l'ultimo sono quantità limitate (integrale di funzione limitata su insieme di lunghezza $\leq T$).

Il centrale

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \varphi(y) dy = \int_0^T \varphi(y) dy$$

Ora basta osservare che $k = \left\lfloor \frac{na}{T} \right\rfloor$ e $R = \left\lfloor \frac{nb}{T} \right\rfloor$

A questo punto basta dividere per n e passare al limite

$$\frac{1}{n} \int_{ma}^{nb} \varphi(y) dy = \boxed{\frac{\text{limitato}}{n}} + \boxed{\frac{(a-k)}{n}} \int_0^T \varphi(y) dy$$

$\downarrow$
 0

$\downarrow$
 $\frac{b-a}{T}$

In conclusione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = (b-a) \boxed{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(y) dy}$$

costante

Sembra strano, ma questo implica anche che

$$\int_0^1 f_n(x) \cdot e^x dx \rightarrow \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(y) dy}_{\text{costante}} \cdot \int_0^1 e^x dx$$

$\uparrow$
 cosa qualunque
 in $L^2((0,1))$

$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$