

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 10

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

Esercizio 1 Dimostrare che le successioni

$$\{n e_n\}$$

$$\{\sqrt{n} e_n\}$$

$$\{\log n \cdot e_n\}$$

non sono debolmente convergenti (e non hanno nemmeno s.succ. debolmente convergenti).

[Si intende che H è uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base Hilbertiana (una sistema ortonormale dovrebbe bastare comunque)].

Oss. Un giorno (terza parte del corso) tutto questo sarà banale perché un teo. dirà "deb. conv. $\Rightarrow$ limitata".

Risolviamo ora "a mano". Detta $\{v_n\}$ la successione, in tutti e 3 i casi si verifica banalmente che

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \langle v_n, e_i \rangle \rightarrow 0 \quad (\text{è } \equiv 0 \text{ appena } n > i)$$

Quindi un fantomatico limite v_∞ dovrebbe soddisfare $\langle v_\infty, e_i \rangle = 0$ per ogni i , quindi $v_\infty = 0$. Pertanto dovrebbe essere che

$$\langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle = 0 \quad \forall w \in H$$

Quindi negare la conv. debole (anche per s.succ.) equivale a trovare $w \in H$ per cui questo non accade (nemmeno per s.succ.)

Nel 1° caso basta prendere

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{i}$$

(converge perché $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < +\infty$)

e osservare che $\langle w, e_n \rangle = \langle ne_n, \frac{1}{n} e_n \rangle = 1$ per ogni n

Nel secondo caso vorrei porre $w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{\sqrt{i}}$, ma non posso

perché $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$ e quindi la serie NON CONVERGE.

Per uscire, occorre fare una serie + sparsa e porre

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{i^2}}{\sqrt{i^2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{i^2}}{i}$$

Questa converge !! Inoltre

$$\langle w, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ non è quadrato perfetto} \\ 1 & \text{se } m = i^2 \text{ per un certo } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ne segue che $\langle w, e_n \rangle \not\rightarrow 0$ perché la s.succ. sui quadrati perfetti tende ad 1. Questo nega la conv. debole di tutta la successione.

(Varante interessante: come si nega la conv. debole di una s.succ.?)

Per la terza opzione occorre una definizione ancora più sparsa

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{2^i}}{i} \quad \text{↖ l'indice è } 2^i$$

Esercizio 2 Sia H sp. di Hilbert separabile con base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Consideriamo

$$[0, 1]^{\infty} := \{v \in H : 0 \leq \langle v, e_n \rangle \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

È fortemente chiuso / compatto?

È debolmente " " ?

Risposta: è debolmente chiuso, quindi anche fortemente chiuso

$$\text{Se } v_n \rightarrow v_\infty, \text{ allora } \langle v_n, e_i \rangle \rightarrow \langle v_\infty, e_i \rangle \quad \forall i \in \mathbb{N}$$
$$[0, 1]^{\mathbb{N}} \Rightarrow \in [0, 1]$$

Non è deb. compatto, quindi nemmeno fortemente compatto.
Infatti, se poniamo

$$v_n := \sum_{i=1}^n e_i$$

Si verifica che $v_n \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$, e $\|v_n\|^2 = n$, quindi non è limitata. Questo implica che non ci sono s.succ. fortem. conv. (e nemmeno debolmente, se si dà per buono il teo. misterioso).

Riusciamo a farlo costruendo w a mano.

Proviamo con

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad \text{con } \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$$

Allora

$$\langle w, v_n \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Basta quindi scegliere a_i in maniera tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty \quad \text{ma} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$$

ad esempio $a_i = \frac{1}{i}$ 😊

Esercizio 3 Stessa cosa con

$$C = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}] \times \dots$$

$$:= \{v \in H : 0 \leq \langle v, e_n \rangle \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1\}$$

C è chiuso debolmente e fortemente (come prima)

C è compatto debolmente. Infatti se $u \in C$, allora

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \text{cost.}$$

Quindi, se $\{u_n\} \subseteq C$, allora $\{u_n\} \subseteq \text{palla}$, ma allora esiste $u_{\infty} \in \text{palla}$ t.c. $u_{n_k} \rightarrow u_{\infty}$.

Ma essendo C debolmente chiuso, allora $u_{\infty} \in C$.

C è compatto fortemente !!! Basta dimostrare questo:

se $\{u_n\} \subseteq C$ è $u_n \rightarrow u_{\infty}$, allora $u_n \rightarrow u_{\infty}$.

Come al solito scriviamo

$$u_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle e_i$$

$$u_{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_{\infty}, e_i \rangle e_i$$

Claim fondamentale: le code sono UNIFORMEMENTE piccole, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle^2 \leq \varepsilon$$

code

e la stessa cosa vale per u_{∞} . Motivo

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle^2 \leq \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ u_n \in C \end{array} \quad (\text{code di una serie convergente})$$

Questo lo dimostra per i u_n , mentre per u_{∞} segue osservando che $u_{\infty} \in C$ allo stesso modo.

Dal claim fondamentale segue la tesi. Infatti

$$\begin{aligned}\|u_n - u_\infty\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_n - u_\infty, e_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \langle u_n - u_\infty, e_i \rangle^2 + \sum_{i=M+1}^{+\infty} \dots\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}\langle u_n - u_\infty, e_i \rangle^2 &= (\langle u_n, e_i \rangle - \langle u_\infty, e_i \rangle)^2 \\ &\leq 2 \langle u_n, e_i \rangle^2 + 2 \langle u_\infty, e_i \rangle^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{da cui } \sum_{i=M+1}^{+\infty} \langle u_n - u_\infty, e_i \rangle^2 &\leq 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_n, e_i \rangle^2 + 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle^2 \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$

e quindi

$$\|u_n - u_\infty\|^2 \leq \sum_{i=1}^M \underbrace{\langle u_n - u_\infty, e_i \rangle^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ e solo un numero finito}}}$$

Ne segue che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u_\infty\|^2 \leq 4\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

da cui la tesi.

— o — o —

Variaute Provare a studiare lo stesso problema con

$$C = [0, 1] \times [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, \frac{1}{\sqrt{3}}] \times \dots$$

Esercizio 4 Consideriamo la sfera

$$S = \{v \in H : \|v\| = 1\}$$

Non è debolmente chiusa (ma fortemente sì). Determinare la sua chiusura debole, cioè S' insieme

$$\text{ClosWeak}(S) = \{v \in H : \exists \{v_m\} \subseteq S \text{ t.c. } v_m \rightharpoonup v\}$$

CLAIM Si tratta di tutta la palla $\{v \in H : \|v\| \leq 1\}$.

Dato $v \in H$ con $\|v\| \leq 1$, voglio trovare $\{v_m\} \subseteq S$ t.c. $v_m \rightharpoonup v$.

Se $\|v\| = 1$, non è molto difficile $\because (v_m \equiv v)$

Se $\|v\| < 1$, cerco v_m del tipo $v_m = v + \alpha_m e_n$, sperando poi che la seconda parte tenda debolmente a 0 (il che accade se $\{\alpha_n\}$ è limitato). Cui deve essere α_n ?

$$1 = \|v_m\|^2 = \|v\|^2 + \alpha_n^2 + 2\alpha_n \langle v, e_n \rangle \quad (*)$$

Questa è una eq. di 2° grado in α_n , che ha come soluzione

$$\alpha_n = \langle v, e_n \rangle \pm \sqrt{\langle v, e_n \rangle^2 - 4(\|v\|^2 - 1)}$$

Devo sperare che $\langle v, e_n \rangle^2 \geq 4(\|v\|^2 - 1)$, il che è vero perché è positivo $\geq$ negativo.

Resta da dimostrare che α_n è limitato, il che sembra davvero ragionevole perché altrimenti il termine α_n^2 comanderebbe e manda il RHS di (*) all'infinito.

[Qualche dettaglio nel video].

— o — o —