

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 09

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

Spazi di Hilbert

Disuguaglianza di Bessel

Sia H uno spazio di Hilbert, e siano $e_1, \dots, e_n$ vettori ortonormali ($\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$).

Allora

$$\forall v \in H \quad \|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2$$

Dim Definiamo r_n in maniera t.c.

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n + \overset{\text{resto}}{r_n}$$

Dico che $\langle r_n, e_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Infatti, se faccio il prodotto scalare di LHS e RHS con un certo e_i trovo

$$\begin{aligned} \langle \cancel{v}, e_i \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle + \langle r_n, e_i \rangle \\ &= \langle \cancel{v}, e_i \rangle + \langle r_n, e_i \rangle \quad \leadsto \langle r_n, e_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Facendo la norma di LHS e RHS troviamo

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2 + r_n^2 + \underbrace{\text{tutti i possibili doppi prodotti}}_{\text{tutti nulli}} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Oss. Il termine $\sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$ è la proiezione di v su spazio generato dagli e_i , mentre r_n è la componente ortogonale.

Teorema Ogni spazio di Hilbert H (anche non separabile) ammette una base Hilbertiana $\{e_i\}_{i \in I}$ (con insieme di indici I magari non numerabile).

Oss. Lo spazio H è separabile se e solo se I è finito o numerabile.

Def. L'insieme $\{e_i\}_{i \in I}$ è una base Hilbertiana se sono vettori ortonormali e il loro span (comb. lin. FINITE) è denso.

Oss. Nel caso separabile la dimostrazione è "costruttiva" (vedi corso 2018/19 o corso 2019/20).

Dim. (non costruttiva) Consideriamo l'insieme Ort di tutti i sottoinsiemi ortonormali di H .

Allora Ort è naturalmente ordinato per inclusione e non vuoto se $H \neq \{0\}$ (ad esempio ci sono i singoli vettori di norma 1). L'ordinamento è PARZIALE.

Ogni catena contenuta in Ort (cioè ogni sottoinsieme di Ort totalmente ordinato) ammette un maggiorante (cioè un elemento, magari non della catena, che è $\geq$ di ogni elemento della catena). Questo è vero perché basta prendere l'unione di tutti gli elementi della catena e osservare che è ancora un sistema ortonormale.

ZORN $\Rightarrow$ esiste un elemento massimale, cioè un sistema ortonormale $\{e_i\}_{i \in I}$ che non è contenuto propriamente in nessun altro sistema ortonormale.

CLAIM: questo elemento massimale ha Span denso.

Supponiamo per assurdo che non sia vero, quindi esiste

$$v \in H \setminus \text{Clos}(\text{Span}(\{e_i\}_{i \in I})).$$

Vorrei togliere a v la sua componente lungo lo span e ottenere un nuovo vettore da aggiungere agli $\{e_i\}_{i \in I}$ per ottenere un sistema ortonormale più grande. L'idea è quindi di porre

$$w := v - \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$$

e poi dividere per la norma.

Problema: I potrebbe essere numerabile. Che vuol dire fare la serie?

Step 1 Per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathcal{I}$ insieme

$$\{i \in I : |\langle v, e_i \rangle| \geq \varepsilon\}$$

è finito. Supponiamo che così non sia. Allora esistono $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, \dots$ per cui $|\langle v, e_{i_k} \rangle| \geq \varepsilon$. Da Bessel
troviamo

$$\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \langle v, e_{i_k} \rangle^2 \geq n \varepsilon^2$$

↑
applicata a
 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\}$

e questa non può essere vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Step 2 L'insieme $\{i \in I : \langle v, e_i \rangle \neq 0\}$ è al più numerabile. Infatti è l'unione

$$\bigcup_{n \geq 1} \{i \in I : |\langle v, e_i \rangle| \geq \frac{1}{n}\}$$

↑
qualsunque cosa che
tende a 0.

e questi sono tutti finiti.

Step 3 Quando si scrive $\sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$ si tratta quindi di

una serie (insieme di indici numerabile o finito). Tale serie converge per il criterio di convergenza delle serie Hilbertiane. Infatti, se $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono gli indici dei termini diversi da 0, vale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle^2 \leq \|v\|^2$$

↑
vero per tutte le somme parziali
grazie a Bessel.

Quindi $\sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$ converge ed è un elemento della chiusura dello Span degli e_i .

Step 4 Ne segue che $w \neq 0$ ed è facile vedere che $\langle w, e_i \rangle = 0$ per ogni $i \in I$ (basta fare il prodotto scalare al RHS e al LHS).
A questo punto $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{\frac{w}{\|w\|}\}$ è un sistema ortonormale più grande. Assumo.

— o — o —

Le proprietà della base Hilbertiana generale sono le stesse di quella numerabile. In particolare, ogni v si scrive come

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$$

↑ si intende che questo è $\neq 0$
al più per un insieme numerabile
di indici.

e valgono le classiche rappresentazioni di norma e prodotto scalare:

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle^2, \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle \langle w, e_i \rangle$$

— o — o —

Completamento di uno spazio di pre-Hilbert, cioè di uno spazio vettoriale H su cui è definito un prodotto scalare definito positivo (non è detto che V sia completo).

Dato un tale H , consideriamo il suo completamento $\hat{H}$ come spazio metrico.

CLAIM: metrica in $\hat{H}$ deriva da una norma, la quale a sua volta deriva da un prodotto scalare, che è l'estensione di quello su H .

Achtung! Ripassare la definizione e costruzione del completamento di uno sp. metrico (vedi lec. Analisi 2 per matematica).

L'unico dettaglio è definire il prodotto scalare.

Prendiamo u e w in $\hat{H}$. Per definizione, questi sono classi di equivalenza di succ. di Cauchy in H .

Scriviamo, con abuso di notazione,

$$u_n \rightarrow u$$

$$w_n \rightarrow w$$

Come definiamo $\langle u, w \rangle_{\hat{H}}$? Come il limite di $\langle u_n, w_n \rangle_H$.

Serve quindi che $\{\langle u_n, w_n \rangle_H\}$ sia di Cauchy in $\mathbb{R}$, il che segue dalla solita stima

$$|\langle u_n, w_n \rangle - \langle u_m, w_m \rangle| = |\langle u_n, w_n \rangle - \langle u_n, w_m \rangle + \langle u_n, w_m \rangle - \langle u_m, w_m \rangle|$$

$$\stackrel{\text{racc. + C.S.}}{\leq} \underbrace{\|u_n\|}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\|w_n - w_m\|}_{\text{piccoli se } n \text{ ed } m \text{ sono grandi}} + \underbrace{\|w_m\|}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\|u_n - u_m\|}_{\text{piccoli se } n \text{ ed } m \text{ sono grandi}}$$

(le succ. di Cauchy sono limitate)

piccoli se n ed m sono grandi

Importante: bisogna accertarsi che la definizione sia ben posta, cioè se

$$\tilde{v}_m \rightarrow v$$

$$\tilde{w}_m \rightarrow w$$

allora $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \tilde{v}_m, \tilde{w}_m \rangle_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle v_m, w_m \rangle_H.$

Questo segue ad esempio dal fatto che la succ.

$$v_1, \tilde{v}_1, v_2, \tilde{v}_2, \dots$$

converge ancora a v , e idem per quella con w .

Il resto delle verifiche (bilinearità e positività) sono lasciate per esercizio.

— o — o —