

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 08

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

Esempio 1 min $\left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u) dx : u(0) = 0, u(1) = \alpha \right\}$
 $u \in C^1([0,1])$ [↑] parametro

$$L(x, s, p) := p^4 + s \quad (ELE) \rightsquigarrow (L_p)' = L_s \rightsquigarrow (4\dot{u}^3)' = 1$$

Volevo espandere i conti, verrebbe $12 \dot{u}^2 \ddot{u} = 1$, ma la prima forma è + comoda!

$$(4\dot{u}^3)' = 1 \rightsquigarrow 4\dot{u}^3 = x + c \rightsquigarrow \dot{u}^3 = \frac{x}{4} + c \rightsquigarrow \dot{u} = \sqrt[3]{\frac{x}{4} + c}$$

$$\rightsquigarrow u(x) = \frac{3}{4} \left| \frac{x}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} + d \quad (c \text{ e } d \text{ sono parametri liberi})$$

oss. che $\int \sqrt[3]{s} ds = \frac{3}{4} |s|^{\frac{4}{3}}$

Trovo c e d usando DBC:

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} |c|^{\frac{4}{3}} + d = 0 \rightsquigarrow d = -\frac{3}{4} |c|^{\frac{4}{3}}$$

$$u(1) = \alpha \Leftrightarrow \frac{3}{4} \left| \frac{1}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} |c|^{\frac{4}{3}} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left| \frac{1}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} - |c|^{\frac{4}{3}}}_{\psi(c)} = \frac{4\alpha}{3}$$

Se $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fosse bigettiva, questa cond. det. c univocamente

Osservo che

$$\psi'(c) = \frac{4}{3} \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{4} + c} - \sqrt[3]{c} \right\} > 0 \quad \text{per monotonia della radice cubica}$$

$$\lim_{c \rightarrow \pm\infty} \psi(c) = \lim_{c \rightarrow \pm\infty} |c|^{\frac{4}{3}} \left\{ \left| \frac{1}{4c} + 1 \right|^{\frac{4}{3}} - 1 \right\} = \pm\infty \quad \text{😊}$$

$\sim \cancel{1 + \frac{1}{4c} + 0} \left(\frac{1}{c} \right) \cancel{1}$

Le DBC determinano una soluzione unica $u_0(x)$.

Sarà punto di min? Ovviamente $w = u_0 + v$ $\nearrow v(0) = v(1) = 0$

$$\begin{aligned} F(w) = F(u_0 + v) &= \int_0^1 \{ \underbrace{u_0^4} + \underbrace{4u_0^3 v} + 6u_0^2 v^2 + 4u_0 v^3 + \underbrace{v^4} + \underbrace{u_0 + v} \} dx \\ &= F(u_0) + \int_0^1 (4u_0^3 v + v) dx = 0 \\ &\quad + \int_0^1 \underbrace{v^2 (6u_0^2 + 4u_0 v + v^2)}_{\geq 0} dx \geq F(u_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 4u_0^3 v dx &= \left[4u_0^3 v \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{(4u_0^3)'}_1 v dx \\ &\quad \begin{matrix} 0 \text{ "perché"} \\ v(0) = v(1) = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ \text{per (ELE)} \end{matrix} \end{aligned}$$

Per il segno del secondo basta osservare che $6A^2 + 4AB + B^2$ è una forma quadratica def. positiva.

Vale il segno di $=$ se e solo se $\dot{v} \equiv 0 \Leftrightarrow v = \text{costante}$, ma la costante è nulla perché $v(0) = v(1) = 0$.

Quindi $u_0(x)$ è l'unico p.to di min di $F(u)$ in $C^1([0,1])$ con le DBC assegnate.

Studiamo la regolarità di $u_0(x)$

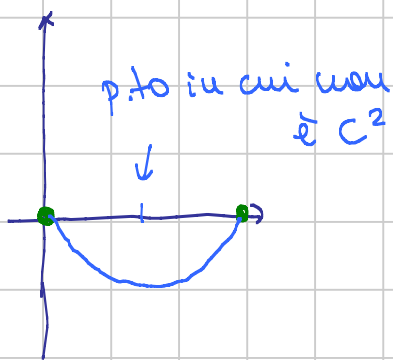
Osserviamo che $u_0(x) = \frac{3}{4} \left\{ \left| \frac{x}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} - |c|^{\frac{4}{3}} \right\}$ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$ e di classe C^∞ dove non si annulla l'argomento, cioè per $x \neq -4c$. Ci sono quindi due casi

- Se $0 \leq -4c \leq 1$, allora la soluzione è C^2 , ma non C^1
- Se $-4c < 0$ oppure $-4c > 1$, allora la soluzione è C^∞ .

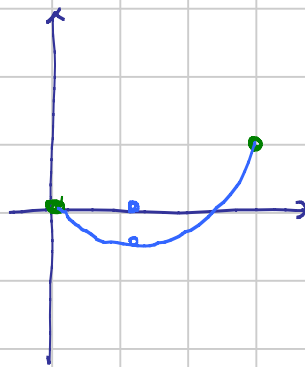
I casi borderline sono $c=0$ e $c=-\frac{1}{4}$, che corrispondono a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4} \right|^{\frac{4}{3}} &= \frac{4}{3} \alpha \quad \quad \quad - \left| \frac{1}{4} \right|^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \alpha \\ &\quad (c=0) \end{aligned}$$

Quindi, ci sono due valori critici di α (simmetrici rispetto a 0) tali che per valori interni la soluz. è C^4 , ma non C^3 , e per valori esterni è C^∞ .



$\alpha = 0$



$\alpha > 0$ piccolo



$\alpha > 0$ grande

Stessa cosa per gli $\alpha < 0$.

Oss. importante

La (ELE) nella forma $(4\dot{u}^3)' = 1$ vale sempre, anche nei pti in cui u non è C^2 .
Invece nella forma $12\dot{u}^2\ddot{u} = 1$ avrebbe dei problemi (superabili) nel caso in cui siamo nel pto di minimo.

Se vogliamo essere più precisi, la soluzione è sempre $C^{1,1/3}$, cioè $\dot{u}$ è $\frac{1}{3}$ -Hölder.

Infatti, la (ELE) nella forma $(4\dot{u}^3)' = 1$ ci dice che $\dot{u}^3$ è C^1 , quindi lip. Inoltre è continua. Le funzioni continue il cui cubo è lip. sono $\frac{1}{3}$ -Hölder (vedi Analisi 1).

Chi è il colpevole di questa perdita di regolarità della soluzione?

In questo caso è il fatto che L_{pp} si annulla, cioè p^4 è strett. convessa, ma la sua derivata seconda può annullarsi.

Oss di convessità la lagrangiana $L(x, s, p) = s + p^4$ è convessa nella coppia (s, p) ed è strettamente convessa in p .
Ne segue che

$$L(s_1 + s_2, p_1 + p_2) \geq L(s_1, p_1) + L_s(s_1, p_1)s_2 + L_p(s_1, p_1)p_2$$

↑
disug. di convessità di Analisi 2
(grafico sta sopra il piano tangente)

con disuguaglianza stretta se $p_2 \neq 0$.

Applicandola con $s_1 = u_0(x)$, $s_2 = v(x)$, $p_1 = \dot{u}_0(x)$, $p_2 = \dot{v}(x)$ otteniamo

[Aggiunto dopo video]

$$(\dot{u}_0(x) + \dot{v}(x))^4 + u_0(x) + v(x) \geq \dot{u}_0(x)^4 + u_0(x) + v(x) + 4\dot{u}_0(x)^3 \dot{v}(x)$$

Integrando in $[0, 1]$ si ottiene $F(u) \geq F(u_0)$.

Infine se $\dot{v}(x) \neq 0$ in un pto, dunque in tutto un intorno, allora $F(u) > F(u_0)$.

Usando la convessità abbiamo dimostrato nuovamente che $u_0(x)$ è unico pto di min.

Esempio 2 $\inf \left\{ \underbrace{\int_{-1}^1 [\dot{u}^2 + (u-x)^2] dx}_{F(u)} : u \in C^1([-1, 1]), u(0) = \alpha \right\}$

Non è un estremo ↑

Idea: lavoriamo separatamente in $[-1, 0]$ e in $[0, 1]$

$$(L_p)' = L_s \Leftrightarrow (2\dot{u})' = 2(u-x) \Leftrightarrow \ddot{u} = u - x$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x & \text{in } [-1, 0] \\ \dot{u}(-1) = 0 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x & \text{in } [0, 1] \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

(ELE) si risolve banalmente: $u(x) = a \cos R x + b \sin R x + x$

La speranza è che le due soluzioni si ricolino in modo C^1 in $x=0$.

→ Se succede, l'inf. è un minimo ed abbiamo il p.to di min.

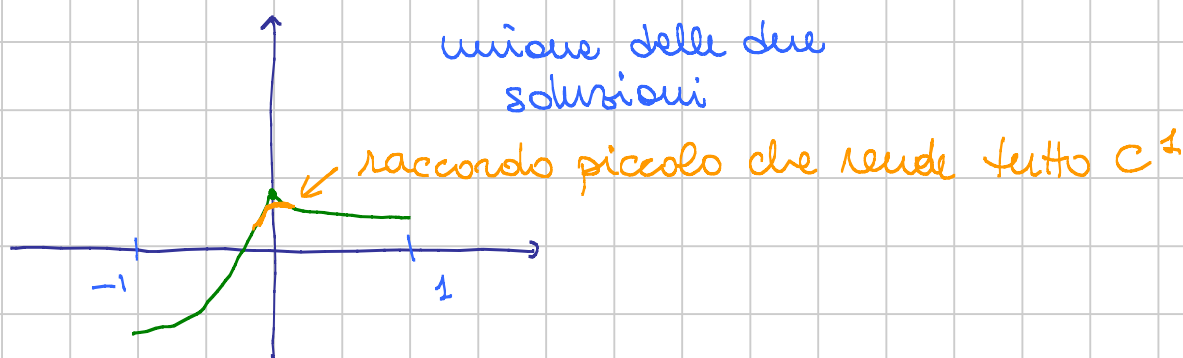
→ Se non succede, l'inf. non è raggiunto ed è = al valore ottenuto "ricollando" i due pezzi

Imponiamo le due NBC: $u(x) = a \sin R x + b \cos R x + x$

$$\begin{aligned} a \sin R(1) + b \cos R(1) &= -1 \\ -a \sin R(1) + b \cos R(1) &= 1 \end{aligned} \quad \text{Det} \neq 0 \leadsto \text{il sistema ha} \\ \text{soluzione } a_0 \text{ e } b_0$$

A questo punto il valore buono di a è b , che dal sistema è 0

Quando non c'è ricolamento, l'inf. si raggiunge con una successione "infinita" che regolarizza l'angolo



Fatto generale (si dimostra con soliti argomenti di approssimazione)

Se $L(x, s, p)$ è continua nelle 3 variabili, allora

$$\sup \left\{ \int_a^b L(x, u, u') : u \in C^1([a, b]) + \text{DBC} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \int_a^b L(x, u, u') : \begin{array}{l} u \in C^1 \text{ a tratti} + \text{DBC} \\ u \in C^0 \end{array} \right\}$$

— o — o —