

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 07

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

$$F(u) = \int_0^\pi (\ddot{u}^2 + \dot{u}^2) dx$$

Calcoliamo ELE in varie forme

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_0^\pi \dot{u}^2 + 2t \int_0^\pi \ddot{u} \ddot{v} + t^2 \int_0^\pi \dot{v}^2 + \int_0^\pi \ddot{u}^2 + 2t \int_0^\pi \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^\pi \dot{v}^2$$

$$\delta F(u, v) := \varphi'(0) = 2 \int_0^\pi \ddot{u} \ddot{v} + 2 \int_0^\pi \dot{u} \dot{v}$$

Abbiamo usato che u e v sono C^2 in $[0, \pi]$

1^a forma integrale di ELE: $\delta F(u, v) = 0$ scritta come sopra

Ora integriamo per parti in modo da ottenere v pulito

$$\int_0^\pi \dot{u} \dot{v} dx = \dot{u}(\pi) v(\pi) - \dot{u}(0) v(0) - \int_0^\pi \ddot{u} v dx$$

$$\int_0^\pi \ddot{u} \ddot{v} dx = \ddot{u}(\pi) \ddot{v}(\pi) - \ddot{u}(0) \ddot{v}(0) - \int_0^\pi \ddot{u} \dot{v} dx$$

$$= \ddot{u}(\pi) \dot{v}(\pi) - \ddot{u}(0) \dot{v}(0) - \ddot{u}(\pi) v(\pi) + \ddot{u}(0) v(0) + \int_0^\pi u^{(4)} v dx$$

Qui volendo assumere maggiore regolarità su u (classe C^4) abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(u, v) &= [\dot{u}(\pi) - \ddot{u}(\pi)] v(\pi) - [\dot{u}(0) - \ddot{u}(0)] v(0) \\ &\quad + \ddot{u}(\pi) \ddot{v}(\pi) - \ddot{u}(0) \ddot{v}(0) \\ &\quad + \int_0^\pi [u^{(4)} - \ddot{u}] v dx \end{aligned}$$

Vogliamo minimizzare $F(u)$ in diverse classi $\mathbb{X}$.

$$① \quad \mathbb{X} := C^2([0, \pi]) \quad \leftarrow \text{sp. vettoriale}$$

Assumiamo tutto regolare

ELE diff.

1ª fase: usando $v \in C_c^\infty((0, \pi)) \rightsquigarrow (FLCR)$

$$u^{(4)} = \ddot{u}$$

2ª fase: usando opportune v che non sono nulle al bordo otteniamo 4 BCs

$$\begin{cases} \dot{u}(\pi) = \ddot{u}(\pi) \\ \dot{u}(0) = \ddot{u}(0) \\ \ddot{u}(\pi) = 0 \\ \ddot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Tutte nate on the road}$$

La soluzione generale di $u^{(4)} = \ddot{u}$ è $(x^4 = x^2 \rightsquigarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm 1 \end{matrix})$

$$u(x) = ae^x + be^{-x} + cx + d$$

(volendo anche $a \cos x + b \sin x + cx + d$)

Fare il conto per esercizio... troviamo che esistono infiniti pti di minimo e sono tutte e sole le funzioni costanti, cosa che si voleva fin dall'inizio.

$$② \quad \mathbb{X} := \{u \in C^2([0, \pi]) : \dot{u}(0) = 1\} \quad \leftarrow \text{sp. affine}$$

$$V := \{v \in C^2([0, \pi]) : \dot{v}(0) = 0\}$$

Rifacendo i conti, dalla fase 1 troviamo $u^{(4)} = \ddot{u}$

Nella fase 2 nascono on the ROAD le BCs

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}(0) &= \dot{u}(0) \\ \ddot{u}(\pi) &= \dot{u}(\pi) \\ \ddot{u}(\pi) &= 0 \\ \dot{u}(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{on the road} \\ \text{c'era già all'inizio} \end{array}$$

Vediamo di impostare il sistema lineare

$$u(x) = a \cosh x + b \sinh x + cx + d$$

$$\dot{u}(x) = a \sinh x + b \cosh x + c$$

$$\ddot{u}(x) = a \cosh x + b \sinh x$$

$$\ddot{u}(x) = a \sinh x + b \cosh x$$

$$\ddot{u}(0) = \dot{u}(0) \Leftrightarrow b = b + c \leadsto c = 0$$

$$\ddot{u}(\pi) = \dot{u}(\pi) \text{ ora è automatico}$$

$$\ddot{u}(\pi) = 0 \Leftrightarrow a \cosh(\pi) + b \sinh(\pi) = 0$$

$$\dot{u}(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$$

$$c = 0, b = 1, a = -\frac{\sinh(\pi)}{\cosh(\pi)} = -\tanh(\pi), d \text{ libero}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$u_0(x) = -\tanh(\pi) \cosh x + \sinh x + d$$

FINO AD ORA NON ABBIAMO RISPOSTO A NULLA.

Dubbi che rimangono

→ le $u_0(x)$ trovate sono p.ti di min?

→ esistono altri p.ti di min? Potrebbero essercene e non essere abbastanza regolari da risolvere il sistema.

Per rispondere, usiamo la solita tecnica. Dato un qualunque $w \in X$, lo scriviamo come

$$w(x) = u_0(x) + v(x) \quad \leftarrow \text{sta in } V$$

$\uparrow$
 una qualunque,
 diciamo con $d = 74$

Con i soliti conti arriviamo a

$$F(u) = F(u_0) + \int_0^\pi [\ddot{v}^2 + \dot{v}^2] dx \geq 0$$

$$+ 2 \int_0^\pi [\ddot{u}_0 \dot{v} + \dot{u}_0 \ddot{v}] dx$$

" come si vede integrando per parti
ora che sappiamo che u_0 è regolare
(basta farla una volta)

Quindi le $u_0(x)$ sono p.ti di crit. e vale il segno di uguale $\Leftrightarrow v \equiv \text{costante}$.

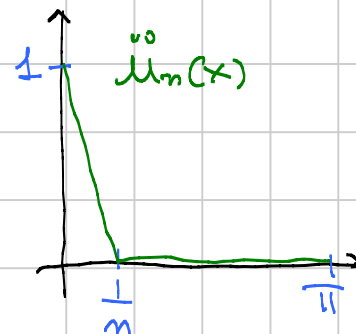
$$[3] \quad \mathbb{X} := \{ u \in C^2([0, \pi]) : \ddot{u}(0) = 1 \}$$

↑ una condizione sulle derivate
secondo è sospetta.

CLAIM: $\inf = 0$ (e a quel p.to min. non esiste)

Basta trovare $\{u_n\} \subseteq \mathbb{X}$ t.c. $F(u_n) \rightarrow 0$

Poniamo $\ddot{u}_n(x)$ come in figura



$$\dot{u}_n(x) := \int_0^x \ddot{u}_n(t) dt \quad (\text{è importante che sia circa 0 su tutto l'intervallo})$$

$$u_n(x) = 47 + \int_0^x \dot{u}_n(t) dt$$

↑ qui scelta libera

Facili conti mostrano che $0 \leq \int_0^\pi \ddot{u}_n(x)^2 dx \leq \frac{1}{n}$

$$|\dot{u}_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [0, \pi] \Rightarrow \int_0^\pi \dot{u}_n(x)^2 dx \leq \frac{1}{n^2}$$



$$\boxed{4} \quad \mathbb{X} := \{ u \in C^2([0, \pi]) : u(0) = u(\pi), \dot{u}(0) = 2 \}$$

$$V := \{ v \in C^2([0, \pi]) : v(0) = v(\pi), \dot{v}(0) = 0 \}$$

Ragionando come sempre, troviamo $u^{(4)} = \ddot{u}$ in fase 1.
Nella fase 2 consideriamo i termini di bordo

$$[\dot{u}(\pi) - \ddot{u}(\pi)] v(\pi) - [\dot{u}(0) - \ddot{u}(0)] v(0)$$

$$+ \dot{u}(\pi) \tilde{v}(\pi) - \cancel{\dot{u}(0) \tilde{v}(0)}$$

Le condizioni finali sono

$$\ddot{u}(\pi) = 0$$

$$\dot{u}(\pi) - \ddot{u}(\pi) = \dot{u}(0) - \ddot{u}(0)$$

$$u(0) = u(\pi)$$

$$\dot{u}(0) = 2$$

} Note on the road

} Note all' inizio

Scritta $u(x) = a \cos R x + b \sin R x + c x + d$, ci aspettiamo di determinare univocamente a, b, c , con d libero.

Le soluzioni trovate sono tutte e sole i p.ti di minimo.

— o — o —