

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 06

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

30/09/2020

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 - 7u) dx$$

Conti preliminari:

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t \int_0^2 \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2 - 7 \int_0^2 u - 7t \int_0^2 v$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = 2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v} - 7 \int_0^2 v$$

$$\boxed{1} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^1([0, 2])\} \quad \text{sp. vettoriale} = V$$

$$u \text{ p.to di min.} \Rightarrow 2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v} - 7 \int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

Se si può integrare per parti si arriva a

$$2 \dot{u}(2)v(2) - 2 \dot{u}(0)v(0) - 2 \int_0^2 \ddot{u} v - 7 \int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\underline{1^a \text{ fase}} \rightsquigarrow v \in C_c^\infty((0, 2)) \rightsquigarrow 2 \ddot{u} = -7$$

$$\underline{2^a \text{ fase}} \rightsquigarrow \text{essendo } v(2) \text{ e } v(0) \text{ liberi} \rightsquigarrow \dot{u}(0) = \dot{u}(2) = 0.$$

Quindi otteniamo che un p.to di min. abbastanza regolare risolve

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = -\frac{7}{2} & \rightsquigarrow u(x) = -\frac{7}{4}x^2 + ax + b \\ \dot{u}(0) = 0 & \rightsquigarrow \dot{u}(x) = -\frac{7}{2}x + a \\ \dot{u}(2) = 0 & \rightsquigarrow a = 0 \\ & \rightsquigarrow -7 + a = 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \ddot{u}(x) = -\frac{7}{2} \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{matrix}} \right\} \text{Grosso guaio}$$

Non si trovano soluzioni di ELE diff + NBC on the road.

CLAIM : $\inf = -\infty$ e il minimo non esiste!!

queste due
righe risolvono
il problema

Basta considerare la succ. $u_n(x) \equiv n$.

$$\boxed{2} \quad X := \{u \in C^1([0,2]) : u(2) = 5u(0)\} = V$$

Come al solito arriviamo a

$$2\dot{u}(2)v(2) - 2\dot{u}(0)v(0) - 2\int_0^2 \ddot{u}v - 7\int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

1ª fase $\leadsto 2\ddot{u} = -7$

2ª fase $10\dot{u}(2)v(0) - 2\dot{u}(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in V$
 $2v(0)\{5\dot{u}(2) - \dot{u}(0)\} = 0 \leadsto \dot{u}(2) = \frac{1}{5}\dot{u}(0)$

Condizione necessaria per essere p.to di min:

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} & \text{ELE} \\ u(2) = 5u(0) & \text{cond. data} \\ \dot{u}(2) = \frac{1}{5}\dot{u}(0) & \text{cond. nata out the road} \end{cases} \quad \begin{aligned} u(x) &= -\frac{7}{4}x^2 + ax + b \\ \dot{u}(x) &= -\frac{7}{2}x + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(2) = 5u(0) &\Leftrightarrow -7 + 2a + b = 5b \\ 5\dot{u}(2) = \dot{u}(0) &\Leftrightarrow 5(-7 + a) = a \leadsto \text{trovo } a \end{aligned}$$

trovo b

Dal sistema trovo in modo unico a e $b \leadsto$ trovo $u_0(x)$
che è l'unico p.to di minimo come posso verificare di
solito modo : $w = u_0 + v$

$$F(w) = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_0^2}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2}_{\text{volendo integro per parti}} + \underbrace{2\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v}}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} - \underbrace{7\int_0^2 u_0}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} - \underbrace{7\int_0^2 v}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} \geq F(u_0)$$

Fatto 0 insieme per ELE
(volendo integro per parti)

Vale il segno di = se e solo se v è costante, ma poiché $v(2) = 5v(0)$ la costante deve essere nulla.

$$\boxed{3} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^1([0,2]) : u(2) = 5 + u(0)\}$$

$$V = \{v \in C^1([0,2]) : v(2) = v(0)\}$$

Al solito modo

$$2\dot{u}(2)v(2) - 2\dot{u}(0)v(0) - 2\int_0^2 \ddot{u}v - 7\int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\underline{1^a \text{ fase}} \rightsquigarrow \ddot{u} = -\frac{7}{2} \quad \underline{2^a \text{ fase}} \rightsquigarrow \text{scelgo } v(2) = v(0) \neq 0 \\ \dot{u}(2) = \dot{u}(0)$$

Quindi cond. nec. è che

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} \\ u(2) = 5 + u(0) \\ \dot{u}(2) = \dot{u}(0) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} \dot{u}(x) \text{ è una retta non costante} \\ \text{incompatibile con} \end{array}$$

Quindi la cond. nec. non è soddisfatta, il che apre a 2 ipotesi

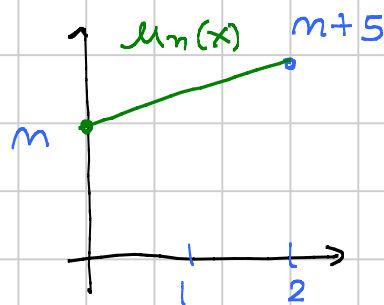
→ il min. esiste, ma la loro regolarità non è suff. ad ottenere la cond. necessaria

→ il min. non esiste.

$$\boxed{\text{CLAIM}} \quad \inf = -\infty$$

$$\text{Basta prendere } u_m(x) = m + \frac{5}{2}x$$

$$F(u_m) = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 7m - \frac{35}{2}x \rightarrow -\infty$$



$$\boxed{4} \quad \mathbb{X} := \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, \dot{u}(2) = \alpha \}$$

Domanda: per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il minimo?

Idea vista alla lezione 5: la condizione $\dot{u}(0) = \text{qualcosa}$ la posso "fregare".

Provo a risolvere con la sola prima condizione

$$\hat{\mathbb{X}} := \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3 \}$$

Al solito modo arrivo a
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} \\ u(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{cases} \quad u(x) = -\frac{7}{4}x^2 + ax + b$$

$\leadsto$ trovo a e b in modo unico.

Dati a e b , trovo un'unica funzione $u_0(x)$ che è soluzione del problema in $\hat{\mathbb{X}}$.

$\rightarrow$ Se $\alpha = 0$, allora $u_0(x)$ è anche soluzione del pbm. originario

$\rightarrow$ Se $\alpha \neq 0$, allora il minimo non esiste, il valore minimo è comunque $F(u_0)$, e una succ. minimizzante si ottiene modificando u_0 alla fine in modo da rispettare $\dot{u}(2) = \alpha$.

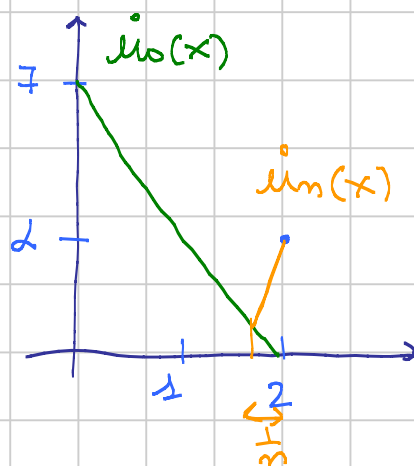
Come si fa la modifica? Calcolo a e b : $b = 3$

$$\dot{u}(2) = 0 \Leftrightarrow -7 + a = 0 \Leftrightarrow a = 7 \leadsto u_0(x) = -\frac{7}{4}x^2 + 7x + 3$$

$$\dot{u}_0(x) = -\frac{7}{2}x + 7$$

Faccio $\dot{u}_n(x)$ come in figura e infine

$$u_n(x) = 3 + \int_0^x \dot{u}_n(t) dt$$



$$\boxed{7} \quad \mathbb{X} := \{ u \in C^1([0,2]) : \int_0^1 u(x) dx = 1 \text{ e } \int_1^2 u(x) dx = 2 \}$$

$$V = \{ v \in C^1([0,2]) : \int_0^1 v(x) dx = 0 \text{ e } \int_1^2 v(x) dx = 0 \}$$

Come al solito

$$2\ddot{u}(2)v(2) - 2\ddot{u}(0)v(0) - 2\int_0^2 \ddot{u} v - 7\int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

1^a fase : scelgo $v \in C_c^\infty((0,2)) \cap V$

$$\int_0^2 (2\ddot{u} + 7) v dx = 0 \quad \forall v \in \text{come sopra}$$

Applico FLCV negli intervalli $(0,1)$ e $(0,2)$

sdo nei 2 singoli posso davvero

e ottengo

$$\begin{array}{lll} 2\ddot{u} + 7 = c_1 & \forall x \in (0,1) & \rightsquigarrow \ddot{u} = 2c_1 \quad \forall x \in (0,1) \\ 2\ddot{u} + 7 = c_2 & \forall x \in (0,2) & \rightsquigarrow \ddot{u} = 2c_2 \quad \forall x \in (0,2) \end{array}$$

2^a fase : $\dot{u}(0) = \dot{u}(2) = 0$. Quindi la cond. necessaria è

$$\ddot{u} = 2c_1 \quad \text{in } (0,1) \quad \rightsquigarrow u_1(x) = c_1 x^2 + a_1 x + b_1 \quad \text{in } [0,1]$$

$$\ddot{u} = 2c_2 \quad \text{in } (0,2) \quad \rightsquigarrow u_2(x) = c_2 x^2 + a_2 x + b_2 \quad \text{in } [1,2]$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

$$\dot{u}(2) = 0$$

$$\int_0^1 u(x) dx = 1$$

$$\int_1^2 u(x) dx = 2$$

Abbiamo ora da determinare 6 costanti $c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2$. Abbiamo a disposizione 2 NBC e 2 integrali + le 2 condizioni occulte che derivano dal ricolloamento C^1 , cioè

$$u_1(1) = u_2(1), \quad \dot{u}_1(1) = \dot{u}_2(1)$$

Conto da fare: il sistema lineare ha soluzione unica e la funzione che si ottiene è davvero un minimo.