

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 05

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

29/09/2020

Prerequisiti: (ELE) + BC.

Vogliamo studiare il minimo di $F_1(u) := \int_0^2 \dot{u}^2 dx$
con diverse condizioni.

Salvo controindizi, consideriamo $u \in C^1([0, 2])$

1 $u(0) = 3$ e $u(2) = 8$ DBC

(ELE) diventa $\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ + BC \end{cases} \rightsquigarrow$ esiste una unica $u_0(x)$ che
risolve (retta che congiunge)

Questa $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Ogni altra $w \in C^1([0, 2])$ che soddisfa le BCs la scrivo come

$$w(x) = u_0(x) + v(x)$$

$\downarrow$ nulla al bordo

$$F_1(w) = \int_0^2 (\dot{u}_0 + \dot{v})^2 = \int_0^2 \dot{u}_0^2 + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v}}_{=0} \geq F_1(u_0)$$

(1^a forma int. di ELE)

e vale il segno di $=$ se e solo se $\dot{v} \equiv 0 \rightsquigarrow v$ è una costante
 $\rightsquigarrow$ essendo nulla al bordo $v \equiv 0$, cioè $w \equiv u_0$

$$\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} = \underbrace{\left[\dot{u}_0 v \right]_0^2}_{\substack{\text{per parti} \\ 0}} - \int_0^2 \ddot{u}_0 v = 0$$

$\uparrow \ddot{u}_0 = 0$
perché v è 0 al bordo

Oss. Posso davvero fare l'integr. per parti perché u_0 abbastanza regolare.

$$\boxed{2} \quad u(0) = 5 \quad \begin{cases} \ddot{u}_0 = 0 & \text{ELE} \\ u(0) = 5 & \text{DBC} \\ \dot{u}(2) = 0 & \text{NBC che nasce su the road} \end{cases}$$

L'unica soluzione è $u_0(x) \equiv 5$. È l'unico p.to di min.

$$w = u_0 + v \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{competitore} & v(0) = 0 \text{ (in } x=2 \text{ non so nulla)} \\ \text{generico} & \end{matrix}$$

$$F_1(w) = \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_0^2}_{F_1(u_0)} + \int_0^2 \underbrace{\dot{v}^2}_{\geq 0} + 2 \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_0 \dot{v}}_0 \geq F_1(u_0) = 0$$

$$\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} = \underbrace{[\dot{u}_0 v]_0^2}_0 - \int_0^2 \underbrace{\ddot{u}_0 v}_0 = 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow \uparrow & \uparrow \uparrow \\ \text{NBC} & \text{condizione su } v \end{matrix}$$

Vale il segno di = se e solo se $\dot{v} \equiv 0$, cioè v costante, ma allora $v \equiv 0$ perché $v(0) = 0$.

$\boxed{3}$ Nessuna condizione min = 0 e i p.ti di minimo sono tutte e sole le funzioni costanti

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0 & \text{ELE} \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{cases} \quad \text{NBC on the road}$$

$\boxed{4}$ $u(0) = u(2)$ (PBC). Come nel caso 3, min = 0 e tutte le costanti sono p.ti di min.

$$\ddot{u} = 0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \quad (\text{on the road}) \quad u(0) = u(2)$$

[5] $u(0) = -u(2)$ A occhio si vede che l'unica soluzione è $u_0(x) \equiv 0$.

$\mathbb{X} := \{u \in C^1([0, 2]) : u(0) = -u(2)\}$ sp. vettoriale

$$\varphi(t) = F_1(u + tv) = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t \int_0^2 \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2$$

$$\delta F_1(u, v) := \varphi'(0) = 2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v}$$

La funzione u per essere un p.to di minimo deve soddisfare

$$\int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx = 0 \quad \forall v \in \mathbb{X}$$

1^a forma integr. di ELE

Supponendo + regolarità, integro per parti:

$$\boxed{\dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) - \int_0^2 \ddot{u} v dx = 0} \quad \text{2^a forma int. di ELE}$$

→ Fase 1: uso $v \in C_c^\infty((0, 2)) \subseteq \mathbb{X} \rightsquigarrow$ ottengo $\ddot{u} = 0 \quad \forall x \in (0, 2)$

→ Fase 2: sparito l'integrale resta

$$0 = \dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) = (\dot{u}(2) + \dot{u}(0))v(2)$$

$\uparrow$
 $v \in \mathbb{X}$

Potendo scegliere $v(2) \neq 0$ otteniamo $\dot{u}(2) = -\dot{u}(0)$

In conclusione un eventuale p.to di min. deve soddisfare

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = 0 & \forall x \in (0, 2) & \text{ELE diff.} \\ u(0) = -u(2) & & \text{BC data all'inizio} \\ \dot{u}(0) = -\dot{u}(2) & & \text{BC nota on the road} \end{cases}$$

Sostituendo $u(x) = a + bx$ si ottiene $a = b = 0$.

È facile vedere che è davvero p.to di min.

[6] $\mathcal{X} := \{ u \in C^1([0,2]) : \int_0^2 u(x) dx = 8 \}$ sp. affine con sp. vett. di riferimento

$$V := \{ u \in C^1 \dots : \int_0^2 u(x) dx = 0 \}$$

Al solito modo: condizione nec. affinché u sia p.to di min è

$$0 = \delta F_1(u, v) = 2 \int_0^2 \ddot{u} v dx \quad \forall v \in V \quad \text{ELE int. 1}$$

Integrando per parti

$$0 = \dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) - 2 \int_0^2 \ddot{u} v dx$$

→ Fase 1: scelgo $v \in C_c^\infty((0,2))$ con $\underbrace{\int_0^2 v(x) dx = 0}_{\text{deve essere } v \in V}$

Senza termini di bordo otteniamo

$$\int_0^2 \ddot{u} v dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ a media nulla}$$

FLCV a media nulla $\Rightarrow \ddot{u} = \text{costante} = c$

→ Fase 2: sparito l'integrale, e potendo scegliere $v(0)$ e $v(2)$ a piacimento, otteniamo $\dot{u}(2) = \dot{u}(0) = 0$.

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= c & \text{ELE diff.} \\ \dot{u}(0) &= 0 \\ \dot{u}(2) &= 0 & \left. \begin{array}{l} \ddot{u}(0) = 0 \\ \ddot{u}(2) = 0 \end{array} \right\} \text{NBC on the load} \\ \int_0^2 u(x) dx &= 8 & \text{condizione int. iniziale} \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{c}{2} x^2 + ax + b \rightsquigarrow \text{impongo le condizioni} \rightsquigarrow \begin{aligned} a &= c \\ b &= 4 \end{aligned}$$

$u_0(x) \equiv 4$ e si vede facilmente che è l'unico p.to di min.

Ogni altro competitor si scrive come $w = u_0 + v$

$$F_1(w) = F_1(u_0) + \int_0^2 \dot{v}^2 dx + 2 \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v}}_0$$

(stessi passaggi di sopra)

Vale il seguito di = se e solo se $\int_0^2 \dot{v}^2 = 0 \leadsto v = \text{costante}$
e la costante è nulla perché $\int_0^2 v = 0$.

$$\boxed{7} \quad \mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, \int_0^2 u(x) dx = 8\}$$
$$V = \{v \in C^1([0,2]) : v(0) = 0, \int_0^2 v(x) dx = 0\}$$

Come sopra otteniamo

$$\ddot{u}(x) = c \quad \leadsto \quad u(x) = \frac{c}{2} x^2 + ax + b$$

$$u(0) = 3$$

$$\dot{u}(2) = 0$$

$$\int u(x) dx = 8$$

Usando le 3 condizioni determino in modo unico a, b, c

Otengo così una $u_0(x)$ che è l'unico p.to di min. (verifica come sopra).

$$\boxed{8} \quad \mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, \dot{u}(1) = 3\}$$

CLAIM: min non esiste e $\inf = 0$.

↑ condizione che coinvolge le derivate prime: forse riesco a "fregarla"

Se $\inf = 0$, allora min non esiste.

Se esistesse sarebbe 0, quindi u sarebbe costante, quindi $\dot{u}(1) = 0$

Devo trovare una succ. infinita, cioè $\{u_n\} \subseteq \mathbb{X}$ b.c.

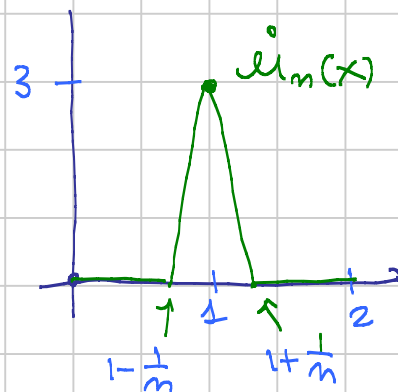
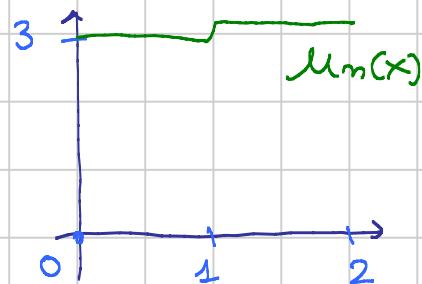
$$F_1(u_n) \rightarrow 0$$

La cosa più comoda è definire $\dot{u}_n(x)$

Si vede subito che

$$F_1(u_n) = \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_n(x)^2}_{\leq 9 \text{ ovunque}} dx$$

$$= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \dot{u}_n(x)^2 dx \leq \frac{2}{n} \cdot 9$$



Basta quindi porre $u_n(x) := 3 + \int_0^x \dot{u}_n(t) dt$.

— o — o —

Idea generale brutale: se la Lagrangiana contiene solo derivate prime, le condizioni imposte su $\dot{u}$ potrebbero essere "aggirabili".