

Varianti con segno di FLCV e DBR

Esempio 1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia $f \in C^0(\Omega)$. Supponiamo

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ in } \Omega$$

Cosa possiamo dedurre?

Claim: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Si ricicla la solita dim.

Supponiamo $f(x_0) < 0$. Allora $\exists r > 0$ t.c.

$$f(x) \leq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

↑
palla



Prendo una v radiale positiva vicino a x_0 e nulla fuori da $B(x_0, r)$.

È evidente che $\int_{\Omega} f v = \int_{B(x_0, r)} f v < 0$



Esempio 2 Stessa cosa con ipotesi solo $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Basta dimostrare che $f(x) \geq 0$ quasi ovunque in ogni palla $B(x_0, r) \subset \subset \Omega$

↑ la misura è contenuta

Se così non fosse, esisterebbe $N \subseteq B(x_0, r)$ con $\text{meas}(N) > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in N$. Anzi posso fare in modo che

$$f(x) \leq \alpha < 0 \quad \forall x \in N$$

↑
costante fissa (spiegazione nel video)

Consideriamo $\{v_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ ma anche $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

- $v_m(x) \equiv 0$ fuori da $B(x_0, r)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
- $0 \leq v_m(x) \leq 1$ in $B(x_0, r)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
- $v_m(x) \rightarrow$ funzione caratteristica di N (cioè 1 in N e 0 fuori)

Ma allora $\int_{\Omega} f(x) v_m(x) dx \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 $\downarrow \leftarrow$ conv. puntuale dominata (da che?)

$$\int_{\Omega} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{caratteristica di } N}}{\mathbb{1}_N(x)} dx = \int_N f(x) dx \leq \alpha \text{meas}(N) < 0$$

Oss. Sistemare i dettagli del lemma di approssimazione

Esempio 3 (DBR con segno) Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e sia
 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a, b)) \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

Cosa possiamo dedurre?

Brutal mode: integriamo per parti! [Ovviamente non potremmo]

$$0 \leq \int_a^b f(x) v(x) dx = \underbrace{[f(x) v(x)]_a^b}_{=0} - \int_a^b \dot{f}(x) v(x) dx$$

$$\leadsto \int_a^b \dot{f}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \dots \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ in } (a, b)$$

$\uparrow$ [≤ 0: cometto dopo video]

$$\leadsto \dot{f}(x) \leq 0 \text{ in } (a, b) \leadsto f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b).$$

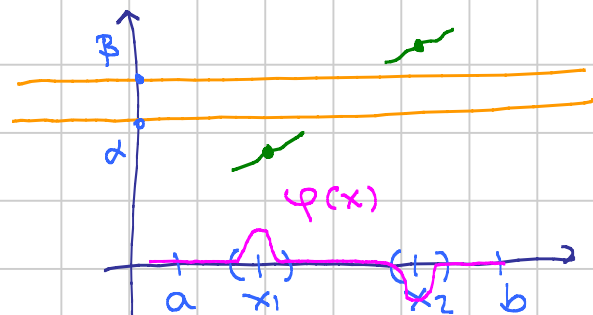
Proviamo a dimostrarlo. Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora esistono $a < x_1 < x_2 < b$ tali che

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Per continuità esistono

$$f(x_1) < \alpha < \beta < f(x_2)$$

ed esiste $\lambda > 0$ tale che



$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in [x_1 - \lambda, x_1 + \lambda]$$

$$f(x) \geq \beta \quad \forall x \in [x_2 - \lambda, x_2 + \lambda]$$

Ora prendo $\varphi(x)$ come in figura, cioè positiva vicino a x_1 e negativa vicino a x_2 e inoltre SIMMETRICA e definisco

$$v(x) = \int_a^x \varphi(t) dt = \text{primitiva di } \varphi \text{ che si annulla in } a \text{ e quindi anche in } b \text{ per simmetria}$$

Osservo che $v(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ perché v è crescente nella prima parte e poi decrescente e infine

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = \int_{x_1 - \lambda}^{x_1 + \lambda} f(x) \varphi(x) dx + \int_{x_2 - \lambda}^{x_2 + \lambda} f(x) \varphi(x) dx$$

$$\leq \int_{x_1 - \lambda}^{x_1 + \lambda} \alpha \varphi(x) dx + \int_{x_2 - \lambda}^{x_2 + \lambda} \beta \varphi(x) dx$$

$$\left(\text{ho usato } \begin{matrix} f \leq \alpha \\ \varphi \geq 0 \end{matrix} \right) \quad \left(\text{ho usato } \begin{matrix} f \geq \beta \\ \varphi \leq 0 \end{matrix} \right)$$

$$= (\alpha - \beta) \int_{x_1 - \lambda}^{x_1 + \lambda} \varphi(x) dx < 0$$

↑
ho usato che nel 2° intervallo l'integrale di φ è uguale al 1° cambiato di segno.

da cui l'assurdo.

Esempio 4 Cosa possiamo dedurre se

$$\int_a^b f(x) \dot{v}(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b)) \quad (\text{senza ipotesi di segno})$$

Tesi: $f \equiv c$ e in realtà $\int f \dot{v} = 0$ sempre
(La stessa cosa vale per FLCV mettendo ≥ 0 nell'ipotesi)

Usiamo DBR classico: se $f \not\equiv c$, allora esiste v tale che

$\int f \dot{v} \neq 0$. Se è < 0 allora ok, se è > 0 basta considerare $-v$

Cosa possiamo dedurre se $\int f \dot{v} = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \dots$ con $v \geq 0$ sempre?

Anche in questo caso $f \equiv c$, ma occorre rientrare nella dimostrazione del DBR.

Esempio 5 Supponiamo

$$\int_a^b f(x) \ddot{v}(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Cosa possiamo dedurre?

Brutal mode

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) \ddot{v}(x) dx = \overset{0}{[f(x) \dot{v}(x)]_a^b} - \int_a^b \dot{f}(x) \dot{v}(x) dx \\ &= - \underset{0}{[\dot{f}(x) v(x)]_a^b} + \int_a^b \ddot{f}(x) v(x) dx \\ &= \int_a^b \ddot{f}(x) v(x) dx \rightsquigarrow \ddot{f}(x) = 0 \rightsquigarrow f(x) = A + Bx \end{aligned}$$

L'idea è di dimostrare che $f(x)$ è un polinomio di 1° grado.

Oss 1 Vale che

$$\{ \ddot{v}(x) : v \in C_c^\infty((a,b)) \} = \left\{ \varphi \in C_c^\infty : \int_a^b \varphi(x) = \int_a^b x \varphi(x) = 0 \right\}$$

[Corretto dopo video: non è $\ddot{\varphi}$ nell'integrale, ma la derivata di φ nulla al bordo]

$$\int_a^b \dot{\varphi}(x)$$

Oss 2 Se $\int_a^b f(x) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \text{classe RHS di sopra}$

allora vale

$$\int_a^b (f(x) - A - Bx) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \text{classe RHS di sopra}$$

Ora scelgo A e B in maniera tale che

$$\int_a^b (f(x) - A - Bx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b (f(x) - A - Bx) x dx = 0$$

(posso perché sistema lineare).

A questo punto vorrei usare $\varphi(x) = f(x) - A - Bx$.

In generale non potrò, ma posso approssimare $\varphi_n \rightarrow \varphi$ come in una delle varie dim. del FLCV a media nulla.

[Sistemare i dettagli del lemma di approssimazione].

— 0 — 0 —