

FLCV, FLCV a media nulla, DBR (e varianti)

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0$$

Ω $\uparrow$ $\uparrow$ funzione test
 Data
 $f \in C^0(\Omega)$
 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$\forall v \in V$$

$\uparrow$ classe di funzioni
 $C_c^\infty(\Omega)$

Domanda: cosa possiamo dedurre su f ?

Prendiamo FLCV, anche nel caso classico ($f \in C^0(\Omega)$).
 Quando posso involgarire la classe V delle funzioni test?

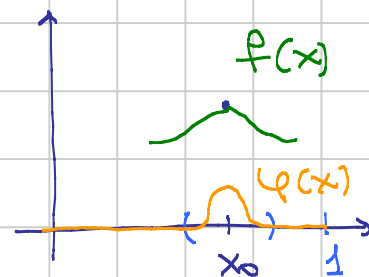
Esempio 1 $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$$V = \{v \in C^1([0,1]) : |v(x)| + |\dot{v}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]\}$$

[S] Si ricada la dim. classica.

Supponiamo wlog $f(x_0) > 0$

Allora esiste $\eta > 0$ t.c.



$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$$

Prendo $\varphi(x) \in C_c^\infty((0,1))$ che è > 0 solo vicino a x_0 . Pongo

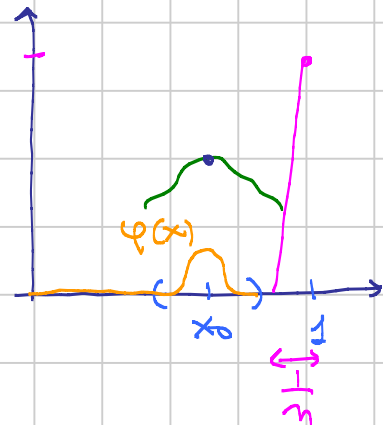
$$v(x) = \varepsilon \varphi(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

e per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo $v \in V$.

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(1) = 3 \}$$

[S1] Tecnica di approssimazione.

Definiamo come prima fuso a φ .
Poniamo



$$v_m(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in [0, 1 - \frac{1}{m}] \\ \text{racordo } C^1 & \text{se } x \in [1 - \frac{1}{m}, 1] \\ \text{che ha porta in} & \\ 3 \text{ per } x=1 & \end{cases} \quad (\text{parabola})$$

$$0 = \int_0^1 f(x) v_m(x) dx \longrightarrow \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx$$

$\forall m \in \mathbb{N}$
abb. grande

- conv. puntuale dominata
- spazzo l'integrale e osservo che la seconda va a 0.

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(\frac{1}{2}) = 3 \}$$

[S1] Non cambia nulla rispetto a prima se $x_0 \neq \frac{1}{2}$.

Ma in realtà basta dim. che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq \frac{1}{2}$.

$\uparrow$ [=0, corretto dopo video]

$$V = \{ v \in C^3([0,1]) : \int_0^1 v(x) dx = 3 \}$$

[S1] Prendo la solita φ e poi pongo $v(x) = c\varphi(x)$ per una opportuna c costante. Visto che $\int \varphi > 0$, allora esiste c t.c. $\int c\varphi = 3$. (Essendo $3 \neq 0$, anche $c \neq 0$)

$$V = \{ v \in C^0([0,1]) : \int_0^{1/2} v(x) dx = 0 \}$$

No nel caso Lebesgue Basta prendere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Allora

$$\int_0^1 f(x) v(x) dx = \int_0^{1/2} v(x) dx = 0$$

$\uparrow$ def. f $\uparrow$ def. di v

Lo stesso esempio non funziona nel caso classico. Cosa possiamo dedurre se inoltre $f \in C^0([0, 1])$?

→ Sicuramente $f(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ (stessa dim di sempre)

→ Sicuramente $f(x)$ è costante in $(0, \frac{1}{2})$ (qui posso applicare FLCV a media nulla)

Per continuità in $\frac{1}{2}$, la costante deve essere nulla.

Quali sono le proprietà decisive della classe V per avere FLCV.

Esempio 2 (FLVC a media nulla vs DBR)

$\Omega = (0, 1) \cup (2, 3)$ Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Scenario 1: $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega) \quad \int_{\Omega} v(x) dx = 0$

Scenario 2: $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$

Possiamo dedurre che f è costante?

Idea fondamentale: su un intervallo le derivate di funzioni C_c^{∞} sono tutte e sole le C_c^{∞} a media nulla

Scenario 1: SI è proprio FLCV a media nulla (controllare che la connessione di Ω non serva nella dimostrazione, e cioè che le due comp. connesse "si parlano")

Scenario 2: No DBR $\Rightarrow f$ è costante nei 2 intervalli $(0,1)$ e $(2,3)$
 Ma le costanti possono essere diverse!

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & x \in (0,1) \\ c_2 & x \in (2,3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \dot{v}(x) dx &= \int_0^1 c_1 \dot{v}(x) dx + \int_2^3 c_2 \dot{v}(x) dx \\ &= c_1 [v(x)]_0^1 + c_2 [v(x)]_2^3 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi nello scenario 2 i due pezzi di Ω "non si parlano"

Brutal mode:

$$\int_a^b f(x) \dot{v}(x) dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per parti}}}{=} \underset{0}{[f(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}} - \int_a^b \dot{f}(x) v(x) dx$$

Occhio: a priori $\dot{f}(x)$
 NON ESISTE.

$\dot{f}(x) \equiv 0$
 $\downarrow$
 f è costante sulle componenti connesse

Oss. più generale $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V$ sto dicendo che

f è ortogonale a tutti gli elementi di V nel senso $L^2(\Omega)$ del termine. Questo implica l'ortogonalità a $\text{Clos}(\text{Span}(V))$

Idea: FLVC è ok se $\text{Clos}(\text{Span}(V)) = L^2(\Omega)$, almeno se $f \in L^2(\Omega)$
 [Commenti finali su ortogonalità nel video].