

FUNZIONALI INTEGRALI

- Modello base:
- $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$
 - $L : \underbrace{(a, b)}_X \times \underbrace{\mathbb{R}}_S \times \underbrace{\mathbb{R}}_P \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiana)
 - $u \in C^1([a, b])$
 u è derivabile in (a, b) con derivata continua che si estende fino al bordo

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx$$

Le possibili varianti sono tantissime

→ Lagrangiana che dipende da derivate successive

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n)}(x)) dx$$

(Non complica più di tanto la vita)

→ integrale improprio: $(a, b) \rightsquigarrow (a, +\infty)$

→ $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (due o più variabili in arrivo)

$$F(u, v) = \int_a^b L(x, u(x), v(x), u'(x), v'(x)) dx$$

↑ ↑
due componenti scalari

→ più variabili in partenza $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

↑ integrale multiplo in $\mathbb{R}^d$

→ più variabili in partenza ed arrivo.
— o — o —

Idea generale :

- il passaggio da una $a + \text{derivate}$ è innocuo
- il passaggio da (a,b) ad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ complica la vita
- se ci sono più var. in partenza ed arrivo son dolori.

— o — o —

Problema classico

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b L(x, u, u') dx}_{F(u)} : u \in \underbrace{\text{insieme di funzioni}}_{\times} \right\}$$

Possibili scelte: $u \in C^1([a,b])$ + condizioni al bordo (BC)
 $\uparrow \uparrow$ classe di regolarità

Può avere senso esulare sotto C^1 come regolarità
— o — o —

RISULTATI DI APPROSSIMAZIONE

Prop. Sia $u \in C^0([a,b])$. Come sempre: $u : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$.
Allora esiste una successione $\{u_m\} \subseteq C^\infty((a,b))$ tale che

- (i) $u_m \rightarrow u$ uniformemente in $[a,b]$
- (ii) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|u_m(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Dim via cannone Usare le convoluzioni

Dim da Analisi 1 La road map è la seguente

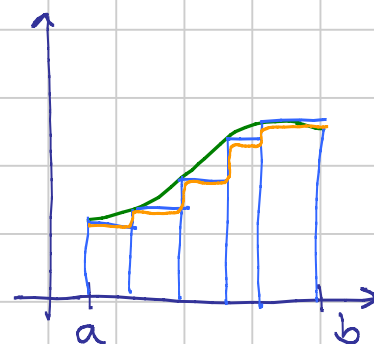
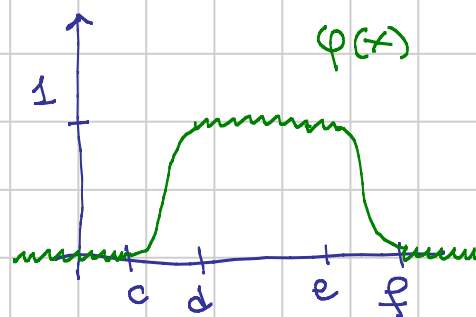
Step 1 Dati $c < d < e < f$ esiste una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ come in figura

Step 2 Data u continua e dato $\varepsilon > 0$, esiste una step function u_ε (comb. lin. finita di caratteristiche di intervalli) tale che

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Basta dividere $[a, b]$ in parti "piccole" (anche non nec. uguali) e definire $u_\varepsilon(x) = \text{valore in un p.to a caso dell'intervallo}$.

Perché funziona? Uniforme continuità

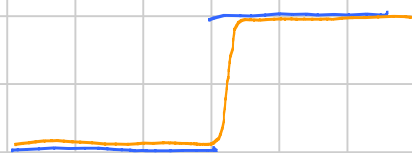


Step 3 "Smussare gli angoli".

Idea: $u_\varepsilon(x)$ è somma di caratteristiche di intervalli moltiplicate per opportune costanti. Sostituisco le caratteristiche con funzioni come quelle dello step 1.

Oppure applico la costruzione dello step 1 per racconciare due tratti successivi.

Mettendo insieme si vede che (i) e (ii) sono verificate.



Oss. Se voglio approssimare con funzioni $C^1([a, b])$ bastava porre

$$u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \hat{u}(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

media di u
tra x e $x+\varepsilon$

$\uparrow$
 u estesa a tutto $\mathbb{R}$ ponendo
 $\hat{u}(x) = u(a)$ per $x \leq a$
 $\hat{u}(x) = u(b)$ per $x \geq b$

Si vede che $u_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ e $\dot{u}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} (\hat{u}(x+\varepsilon) - \hat{u}(x))$

e si vede che u_ε sono equicontinuate e $u_\varepsilon \rightarrow u$ unif. in $[a,b]$ (uniforme continuità)

Esempio 1

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^\pi (u - \sin x)^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{u \in C^0([a,b]), u(0) = u(\pi) = 1}_{\times} \right\}$$

Brutal mode: u vorrebbe essere $\sin x$, ma allora se è continua non può fare 1 in 0 e π .

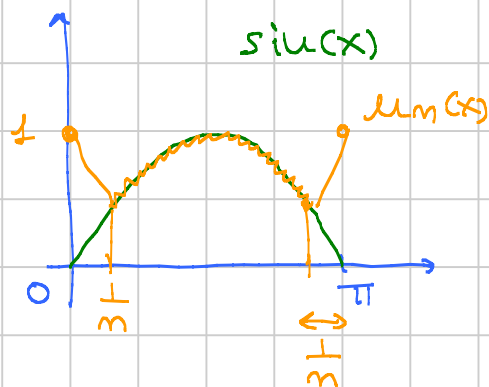
CLAIM: il minimo non esiste e $\inf = 0$.

Ovvio: $\inf \geq 0$

Cerco un ammissibile tale che $F(u_n) \rightarrow 0$.

Si vede abbastanza bene che

$$\begin{aligned} F(u_n) &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} (u_n(x) - \sin x)^2 dx \\ &\quad + \int_{\pi - \frac{1}{n}}^\pi (u_n(x) - \sin x)^2 dx \\ &\leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quindi } \inf = 0 \end{aligned}$$



Min non esiste $(u(x) - \sin x)^2 \geq 0$ e continua. Per avere $\int = 0$ deve essere $\equiv 0 \leadsto$ addio BC.

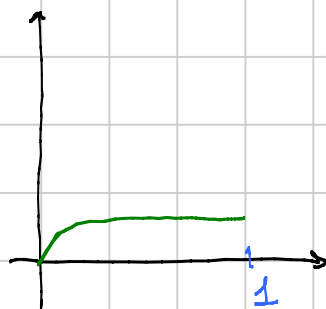
Esempio 2

$$\min \left\{ \int_0^1 \{ \dot{u}(x)^2 + u(x)^2 \} dx : \dot{u}(0) = 2, u \in C^1([0,1]) \right\}$$

Anche in questo caso $\inf = 0$ e min N.E.

Cose ovvie: $\inf \geq 0$

min N.E. (u dovrebbe essere $\equiv 0$)

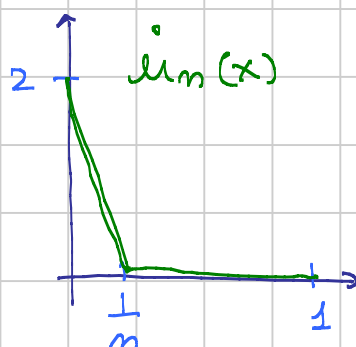


Meno ovvio: trovare successione infizzante u_n

Prendo la primitiva della funzione disegnata che fa 0 in 0.

$$\int_0^1 \dot{u}_n^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} \dot{u}_n^2 \leq \frac{4}{n} \rightarrow 0$$

$$u_n(x) = \int_0^x \dot{u}_n(t) dt \leq \frac{2}{n} \quad (\text{distinguere } x > \frac{1}{n} \text{ e } x \leq \frac{1}{n})$$



$$\leadsto \int_0^1 u_n(x)^2 dx \leq \frac{4}{n^2} \rightarrow 0$$

Oss. Non avrei potuto fare il punto

→ nel 1° caso se c'era $\dot{u}^2$ nel funzionale

→ " 2° " " $\dot{u}^2$ " "

— o — o —