

Calcolo delle Variazioni : $\rightarrow$ Metodo indiretto
 $\rightarrow$ Metodo Diretto (teo. di Weierstrass)

$$\min \{ F(x) : x \in X \}$$

$\uparrow$
 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\uparrow$ insieme

Nozione di convergenza in X = lista delle succ. convergenti e dei relativi limiti.
 $\downarrow$
 compatti + funzioni SCI

Weierstrass classico $F: X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste il minimo.
 $\uparrow$ SCI $\uparrow$ cpt.

Oss. Tutta la difficoltà del problema: trovare nozione di conv. che renda X cpt. e F sci.

Esercizio 1 Sia X insieme e sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che
 $\min \{ F(x) : x \in X \}$
 esista.

Allora esiste almeno una nozione di convergenza che renda X compatto e F SCI.

Dim (pregatura) Sia $x_0 \in X$ un p.to di min, cioè
 $F(x_0) \leq F(x) \quad \forall x \in X$.

Prendiamo la nozione secondo cui ogni succ. in X conv. a x_0
 Si verifica che funziona! La cpt. è quasi ovvia.

Se $x_n \rightarrow x_0$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq F(x_0) \quad \text{😊}$$

Varianti di W. con coercività.

Def. Una $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice coerciva se esiste $K \subseteq X$ cpt., $\neq \emptyset$
(se $\{x_n\} \subseteq K$ è succ., allora esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in K$ secondo
la nozione) tale che

$$\inf \{F(x) : x \in X\} = \inf \{F(x) : x \in K\}.$$

Teorema (W. generalizzato) Se $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ è SCI + coerciva,
allora $\min \{F(x) : x \in X\}$ esiste.

Come verifico la coercività? Ci sono due convezioni suff.
(non necessarie).

→ Esiste un sottolivello cpt. e non vuoto di F , cioè esiste
 $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\emptyset \neq S_M := \{x \in X : F(x) \leq M\} \quad \text{e cpt.}$$

↑ di solito è importante

→ Tutti i sottolivelli di F sono cpt
(Un sottolivello $\neq \emptyset$ esiste per forza ...) } più usata
nelle applicas.

In entrambi i casi si tratta di osservare che la battaglia per
il minimo si gioca in un qualunque sottolivello $\neq \emptyset$.

Cosa vuol dire operativamente verificare che i sottolivelli sono
compatti?

Prendere una qualunque succ. $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $F(x_n) \leq M$
per ogni $n \in \mathbb{N}$ per un qualunque M fisso, e dimostrare che
esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in$ sottolivello (automatico se
 F è SCI)

La nozione di conv. può essere davvero strana!

Esempio 1 $X = \mathbb{N}$. Le succ. conv. sono solo quelle costanti, e convergono al valore stesso.

- Chi sono le funzioni SCI? Tutte! Anzi sono pure continue
- Chi sono i sottoinsiemi compatti? Tutti e soli quelli con un numero finito di elementi. (Se X ha ∞ elementi, allora esiste una succ. x_n iniettiva, e questa non può avere s.succ. costanti, che sono le uniche conv.)

Esempio 2 $X = \mathbb{N}$. Le succ. conv. sono solo quelle costanti, e $x_n \equiv k$ converge a $k+1$.

- chi sono le funzioni SCI? Seme che

$$\begin{array}{ccc} F(k) & \geq & F(k+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ x_n & & x_\infty \end{array} \quad x_n \rightarrow x_\infty$$

quindi sono le funzioni decrescenti.

- Chi sono i compatti? Se K è compatto e $i \in K$, allora la successione $x_n \equiv i$ deve avere s.succ. conv. a $x_\infty \in K$, quindi $i+1 \in K$. Quindi

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad [i \in K \Rightarrow i+1 \in K]$$

Quindi K deve essere una semiretta destra!

Una semiretta dx può essere cpt.?

No! Altrimenti $F(x) = \frac{1}{x}$ su $\mathbb{N}$ verificherebbe le hp di W rispetto a questa nozione di conv., quindi avrebbe un e palesemente non lo ha.

Perché le semirette dx non sono cpt.?

Hanno ∞ elementi, quindi contengono $\{x_n\}$ iniettiva che non può avere s.succ. conv. (dovrebbero essere costanti)

L'unico cpt. è il $\emptyset$.

Esempio 3 $X = \mathbb{N}$. Ogni s.succ. converge e conv. a 2020.

Chi sono i cpt? $K \subseteq X$ è cpt, se e solo se $K = \emptyset$ oppure $2020 \in K$

Chi sono le funzioni SCI? Sono tutte e sole quelle con minimo in 2020!!

Devo dim. che $F(x) \geq F(2020) \quad \forall x \in X$. Supponiamo per assurdo che

$$\exists y \in X \quad \text{t.c.} \quad F(y) < F(2020)$$

Prendo $x_n \equiv y$. Ora $x_n \rightarrow 2020$ ed essendo F SCI

$$F(2020) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = F(y) < F(2020).$$

$\uparrow$
succ costante

Esempio 4 $X = \mathbb{N}$. Ogni succ. conv. a qualunque limite!!

Chi sono i compatti? Tutti (ogni succ. ha s.succ. che converge ad un elemento di K . Ha anche tante s.succ. che convergono ad el. che $\notin K$, ma questo è irrilevante)

Chi sono le funzioni SCI? Sono solo le costanti. Infatti se esistono

$$F(y_1) < F(y_2)$$

allora basta prendere $x_n \equiv y_1$. Osservo che $x_n \rightarrow y_2$, e quindi

$$F(y_2) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(y_1) = F(y_1) < F(y_2).$$

— 0 — 0 —