

A.A. 2020/2021
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 33. Disuguaglianza di Gagliardo: due dimostrazioni del caso a 3 variabili, caratterizzazione dei casi di uguaglianza in 2 e 3 variabili.	5
Lezione 34. Disuguaglianze alla Brascamp-Lieb: come utilizzare argomenti di riscaldamento orizzontale per determinare gli esponenti per cui valgono.	11
Lezione 35. Commenti generali sulla definizione di spazi di Sobolev: stabilità per passaggio al limite, classi di funzioni test per cui vale l'integrazione per parti della definizione W , importanza della classe di funzioni test nella definizione di convergenza debole, completamento astratto vs approssimazione.	17
Lezione 36. Spazi di Sobolev per $p = \infty$: H diverso da W	22
Lezione 37. Rincollamento di funzioni di Sobolev definite su un ricoprimento di un aperto. Se le derivate parziali deboli sono continue, allora la funzione è di classe C^1 . 27	27
Lezione 38. Se il gradiente debole è nullo, allora la funzione è debolmente costante. Utilizzo di cutoff e convoluzioni per ottenere approssimazioni deluxe.	32
Lezione 39. Argomento di riscaldamento orizzontale che permette di individuare gli esponenti coinvolti nelle immersioni di Sobolev pure. Funzioni di Sobolev radiali. .	38
Lezione 40. Dimostrazione della caratterizzazione delle funzioni di Sobolev radiali. Ottimalità delle immersioni di Sobolev per esponenti minori della dimensione. . .	43
Lezione 41. Ottimalità delle immersioni di Sobolev per esponenti uguali e maggiori della dimensione. Utilità dei logaritmi nella costruzione di tali esempi.	48
Lezione 42. Esempi di aperti patologici in cui non valgono i teoremi di immersione e di immersione compatta, o per lo meno non valgono con tutti gli esponenti che ci si aspetterebbe.	53
Lezione 43. Dimostrazione del teorema di immersione compatta (Rellich-Kondrachov) e controesempio nel caso con esponente critico. [Versione con audio della corrispondente lezione dell'anno precedente]	58
Lezione 44. Introduzione al problema della traccia. Costruzione della traccia nel caso modello del semispazio. [Versione con audio della corrispondente lezione dell'anno precedente]	64
Lezione 45. Costruzione di un 2-extender da una semiretta a tutta la retta.	69

Lezione 46. Costruzione di m -extender in vari aperti della retta.	74
Lezione 47. Esempio esplicito di un 1-extender da un sopra-grafico a tutto il piano. Formula di Gauss-Green per funzioni nulle al bordo.	79
Lezione 48. Esempi di 1-extender e 2-extender su sopra-grafici nel piano.	84
Lezione 49. Esempi di costruzione di 1-extender per sottoinsiemi del piano, e di dimostrazione della loro non esistenza.	89
Lezione 50. Primo esempio di problema variazionale in più variabili, con discussione della compattezza, della semicontinuità e della regolarità della soluzione.	94
Lezione 51. Discussione del seguente problema: se una funzione sta in uno spazio di Sobolev, possiamo concludere che il suo quadrato sta nello stesso spazio?	99
Lezione 52. Ulteriori esempi di problemi variazionali in due variabili.	104
Lezione 53. Primi esempi ed esercizi sugli operatori lineari. Operatori di moltiplicazione in spazi di Hilbert separabili.	109
Lezione 54. Un operatore di moltiplicazione è compatto se e solo se la successione degli autovalori tende a zero. Mancanza di correlazione tra iniettività e surgettività per operatori lineari in dimensione infinita.	114
Lezione 55. Studio di un operatore di moltiplicazione in uno spazio L^2	119
Lezione 56. Esempio classico di operatore lineare, simmetrico e compatto: inverter della derivata seconda con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee (tre approcci: elementare, variazionale, via Lax-Milgram). Inizio della discussione con condizioni al bordo di Neumann omogenee.	125
Lezione 57. Inverter della derivata seconda con condizioni al bordo di Neumann omo- genee: discussione dettagliata dell'approccio via Lax-Milgram (quadro funzionale, deduzione dell'equazione e delle condizioni al bordo). Serie di Fourier di soli seni, soli coseni, oppure seni e coseni.	130
Lezione 58. Costante di Poincaré/Wirtinger e primo autovalore della derivata seconda con opportune condizioni al bordo. Discussione di un operatore definito come solver di una equazione non lineare, con diverse scelte degli spazi funzionali.	135

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 33

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Variazioni sulle disuguaglianze alla Brascamp-Lieb

Dati un intero $d \geq 2$, date d funzioni $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Consideriamo le proiezioni $P_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ che dimenticano la i -esima componente. Poniamo

$$\varphi(x) := \prod_{i=1}^d \varphi_i(P_i x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Allora vale

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{i=1}^d \|\varphi_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{d-1})} \quad (\text{GAGLIARDO } \sim 1959)$$

Esercizio 1 Nel caso $d=2$, capire quando si ha uguaglianza

In questo caso abbiamo $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$ e la disug. diventa

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x,y)| dx dy \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy$$

Questa è una banalità grazie a Fubini-Tonelli (formula di riduzione per integrali doppi):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x,y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| \cdot |g(y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \end{aligned}$$

Quindi vale il segno di $=$ in ogni caso.

Esercizio 2 Fare dimostrazione nel caso $d=3$ e capire qualcosa sui casi di uguaglianza

In questo caso $\varphi(x, y, z) = a(y, z) \cdot b(x, z) \cdot c(x, y)$ e voglio dim. che

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x, y, z)| dx dy dz \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dx dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} c(x, y)^2 dx dy \right\}^{1/2}$$

Dim. 1 **Tecnica $3=2+1$** Osserviamo che wlog possiamo assumere $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}^3} a(y, z) \cdot b(x, z) \cdot c(x, y) dx dy dz$$

$$\stackrel{3=2+1}{=} \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z) \cdot b(x, z) dz \right\} dx dy$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y) \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dz \right\}^{1/2} dx dy$$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$ (pensata come funzione di x e y)

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} c(x, y)^2 dx dy \right\}^{1/2}}_{\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dz \right) dx dy \right\}^{1/2}}_{g(y) \cdot f(x)}$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} a(y, z)^2 dz \cdot \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} b(x, z)^2 dz \right\}^{1/2}$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y, z)^2 dx dz \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} b(x, z)^2 dx dz \right\}^{1/2}$$

" " $\|a\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad \|b\|_{L^2(\mathbb{R})}$

Dim 2 **Temica 3 = 1+2** Notazioni come prima

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(y,z) b(x,z) c(x,y) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}} \left\{ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} a(y,z) b(x,z)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{c(x,y)}_{\frac{1}{2}} dx dy \right\} dz$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y,z)^2 b(x,z)^2 dx dy \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} c(x,y)^2 dx dy \right\}^{1/2} dz$$

$\|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ ed esce fuori dall'integrale

$$= \|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y,z)^2 b(x,z)^2 dx dy \right\}^{1/2} dz$$

Fissato z , è l'integrale in $\mathbb{R}^2$ del prodotto di una $g(y)$ per una $f(x)$, quindi per la solita formula

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy \cdot \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx \right\}^{1/2} dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx \right\}^{1/2} dz$$

$$= \|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy \right\}^{1/2}}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx \right\}^{1/2}}_{\frac{1}{2}} dz$$

$$\leq \|c\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dy dz \right\}^{1/2}}_{\|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} \underbrace{\left\{ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dx dz \right\}^{1/2}}_{\|b\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}$$

Oss. Entrambe le dimostrazioni coinvolgono 2 disug. di Hölder con esponenti $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Per capire i casi di uguaglianza, ricordiamo che in Hölder vale il segno di $=$ se e solo se le funzioni sono una moltiplica dell'altra (per una costante numerica).

Esaminiamo la 1^a dimostrazione. Il 1° Hölder era

$$\int_{\mathbb{R}} a(y,z) b(x,z) dz \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} a(y,z)^2 dz \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}} b(x,z)^2 dz \right\}^{1/2}$$

Se vogliamo che per ogni x e y valga il segno di = ci serve che

$$a(y,z) = \text{costante} \cdot b(x,z)$$

↑ può dipendere da x e y .

Brutal mode: supponendo di poter dividere, questo si traduce in

$$\frac{a(y,z)}{b(x,z)} \text{ dipende solo da } x \text{ e } y \text{ (cioè non dipende da } z \text{!)}$$

Visto che potevo fare il 2+1 con ogni variabile nel +1, questo vuol dire che

$$\frac{b(x,z)}{c(x,y)} \text{ non dipende da } x, \quad \frac{c(x,y)}{a(y,z)} \text{ non dipende da } y$$

Una possibilità è che esistano 3 funzioni $f(x), g(y), R(z)$ tali che

$$a(y,z) = g(y) R(z)$$

$$b(x,z) = f(x) R(z)$$

$$c(x,y) = f(x) g(y)$$

Osserviamo che se a, b, c sono come sopra, allora vale il segno di = nella Gagliardo

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(y,z) b(x,z) c(x,y) dx dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)^2 g(y)^2 R(z)^2 dx dy dz$$

$$= \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y)^2 dy \right\} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} R(z)^2 dz \right\} = \text{LHS}$$

Vediamo come sono fatti i 3 termini al RHS della Gagliardo

$$\begin{aligned}
 \|a\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(y,z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} g(y)^2 R(z)^2 dy dz \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y)^2 dy \cdot \int_{\mathbb{R}} R(z)^2 dz \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}} R(z) dz \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Poiché lo stesso vale per le altre variabili, moltiplicando si ottiene $RHS = LHS$, dunque c'è sempre uguaglianza.

Ci sono altre possibilità? Chi sono moralmente f, g, R ?
 Cioè: date a, b, c , come determino f, g, R , posto che esistano?
 Osservo che deve essere

$$f(x)^2 = \frac{b(x,z) \cdot c(x,y)}{a(y,z)}$$

Siamo sicuri che dipenda solo da x ? Se valgono i seguenti = nelle Hölder

$$\begin{aligned}
 \frac{b(x,z) \cdot c(x,y)}{a(y,z)} &= \boxed{b(x,z)} \cdot \boxed{\frac{c(x,y)}{a(y,z)}} \quad \text{non dipende da } y \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad \text{non dipende da } y \quad \text{non dipende da } y \\
 &= \boxed{c(x,y)} \cdot \boxed{\frac{b(x,z)}{a(y,z)}} \quad \text{non dipende da } z \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad \text{non dipende da } z \quad \text{non dipende da } z
 \end{aligned}$$

Quindi se valgono gli = in Hölder, possiamo definire f, g , ed R con le proprietà volute.

$$f(x)^2 = \frac{bc}{a}$$

$$g^2 = \frac{ca}{b}$$

$$a^2 = \frac{ab}{c}$$

Queste funzionano perché

$$a^2 = \frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c} = g^2 a^2$$

e analogamente per le altre.

Esercizio Rendere rigoroso il discorso cercando di non dividere,
o per lo meno dividendo solo quando i denominatori
sont sono diversi da 0.

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 34

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 Determinare per quali esponenti p e q vale

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(x,y) \cdot b(x) \, dx \, dy \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \cdot \|b\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

per ogni $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e ogni $b \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (ma basta molto meno)

Oss 1: come sempre suppongo wlog $a \geq 0$ e $b \geq 0$

Argomento di riscaldamento Se vale per le funzioni $a(x,y)$ e $b(x)$, allora vale anche per le funzioni

$$\hat{a}(x,y) = a(\lambda x, y) \quad \hat{b}(x) = b(\lambda x)$$

qualunque sia il valore $\lambda > 0$. Vediamo come si comportano LHS e RHS.

$$\text{LHS} = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}(x,y) \hat{b}(x) \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} a(\lambda x, y) b(\lambda x) \, dx \, dy$$

$$\lambda x = z \rightsquigarrow dx = \frac{1}{\lambda} dz \quad = \frac{1}{\lambda} \iint_{\mathbb{R}^2} a(z, y) b(z) \, dz \, dy$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}(x,y)^p \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} a(\lambda x, y)^p \, dx \, dy = \frac{1}{\lambda} \iint_{\mathbb{R}^2} a(z, y)^p \, dz \, dy$$

e quindi $\|\hat{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$

In maniera del tutto analoga $\|\hat{b}\|_{L^q(\mathbb{R})} = \frac{1}{\lambda^{1/q}} \|b\|_{L^q(\mathbb{R})}$

$$\hat{\text{LHS}} \leq \hat{\text{RHS}}, \text{ cioè } \frac{1}{\lambda} \text{LHS} \leq \frac{1}{\lambda^{1/p+1/q}} \text{RHS}$$

quindi deve essere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (se è $>$ oppure $<$ le cose vanno male per $\lambda \rightarrow +\infty$ o per $\lambda \rightarrow 0^+$)

Analogamente posso riscalarare in y , ponendo

$$\tilde{a}(x, y) := a(x, \lambda y)$$

$$\tilde{b}(x) = b(x)$$

$\uparrow$ resta lo stesso

Allo stesso modo troviamo

$$\tilde{LHS} = \frac{1}{\lambda} LHS, \quad \tilde{RHS} = \frac{1}{\lambda^p} RHS$$

Da questa deduciamo $p=1$ e quindi $q=+\infty$, nel qual caso la disug. è ovviamente banale.

Esempio 2 Come prima con

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x, y, z) b(x, y) c(y, z) dx dy dz \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \|c\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}$$

Vediamo come riscalarare LHS e RHS

• Cambio x con λx : $\hat{LHS} = \frac{1}{\lambda} LHS$

$$\|\hat{b}\|_{L^q} = \frac{1}{\lambda^{1/q}} \|b\|_{L^q}, \quad \|\hat{a}\|_{L^p} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \|a\|_{L^p} \quad \|\hat{c}\|_{L^r} = \|c\|_{L^r}$$

Mettendo insieme

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

• Cambio y con λy : $\hat{LHS} = \frac{1}{\lambda} LHS$, mentre al RHS riscalarare i 3 termini come $1/p, 1/q, 1/r$.

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leadsto r = +\infty$$

• Cambio z in λz :

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leadsto p=1, q=+\infty$$

Ancora una volta la disug. è banale per $p=1, q=+\infty, r=+\infty$.

— 0 — 0 —

Oss. Stiamo anche dim. che per altri valori dei parametri la disug. è falsa. Basta prendere 3 funzioni a, b, c fisse e $\neq 0$, e poi riscalare opportunamente.

Esempio 3 Come prima per

$$\int_{\mathbb{R}^3} a(x,y) b(y,z) c(x) dx dy dz \leq \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \|c\|_{L^r(\mathbb{R})}.$$

$$\bullet x \rightsquigarrow \lambda x : \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/r}}$$

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

$$\bullet y \rightsquigarrow \lambda y : \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1/p}} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/q}}$$

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\bullet z \rightsquigarrow \lambda z : \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^{1/q}}$$

$$1 = \frac{1}{q}$$

L'unica possibilità è $q=1, p=+\infty, r=1$.

Vediamo se è vera in questo caso:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} a(x,y) b(y,z) c(x) dx dy dz &\leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^3} b(y,z) c(x) dx dy dz \\ &= \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} b(y,z) dz \cdot \int_{\mathbb{R}} c(x) dx \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio 4 Come sempre con

$$\int_{\mathbb{R}^4} a(x,y) b(y,z) c(z,w) d(w,x) dx dy dz dw \leq \underbrace{\|a\|_p \cdot \|b\|_q \cdot \|c\|_r \cdot \|d\|_s}_{\text{tutte norme in } \mathbb{R}^2}$$

$$x \rightarrow \lambda x : \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{s}$$

$$y \rightarrow \lambda y : \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$z \rightarrow \lambda z : \quad 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

$$w \rightarrow \lambda w : \quad 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$$

L'unica soluzione dovrebbe essere $p=q=r=s=2$.

[Dopo video: NO, esistono infinite soluzioni. Basta che sia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, r=p, s=q$.
Questi casi vanno tutti bene, con la stessa dim. della pagina successiva.]

Resta da dimostrarla in questo caso

$$\int_{\mathbb{R}^4} \underbrace{a(x,y) c(z,w)}_{\frac{1}{2}} \underbrace{b(y,z) d(w,x)}_{\frac{1}{2}} dx dy dz dw$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} a^2 c^2 \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} b^2 d^2 \right\}^{1/2}$$

Ora basta osservare che

$$\int_{\mathbb{R}^4} a(x,y)^2 c(z,w)^2 dx dy dz dw =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^2} a(x,y)^2 dx dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^2} c(z,w)^2 dz dw \right)$$

Esempio 5 Come sempre con

$$\int_{\mathbb{R}^4} a(x,y) b(x,z) c(x,w) d(y,z) e(y,w) f(z,w) dx dy dz dw$$

$$\leq \underbrace{\|a\| \|b\| \|c\| \|d\| \|e\| \|f\|}_{\text{norme in opportuni spazi } L^p(\mathbb{R}^2)}$$

Al solito cerco di indovinare gli esponenti riscalandolo

• $x \rightarrow \lambda x$: $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ p, q, r sono gli esponenti nelle norme di a, b, c

Utilizzando y, z, w troviamo altre 3 relazioni, ma abbiamo 6 incognite, dunque servono altre relazioni !!

Idea: fare riscalamento su più di una variabile!

$x \rightarrow \lambda x$ e $y \rightarrow \lambda y$, cioè considero $\hat{a}(x,y) = a(\lambda x, \lambda y)$
 $\hat{b}(x,z) = b(\lambda x, z)$
 e così via.

Cambiando variabili negli integrali

$$\hat{LHS} = \frac{1}{\lambda^2} LHS$$

$$\|\hat{a}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{2/p}} \|a\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

$$\|\hat{b}\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\lambda^{2/q}} \|b\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$$

(analogo per c, d, e)

$$\|\hat{f}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^2)}$$

↑
inalterata

Da qui si ottiene

$$2 = \frac{2}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} \quad \text{e altre 5}$$

relazioni analoghe. Alla fine tutti gli esponenti sono = 3.

Resta da dimostrare che in questo caso funziona:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \underbrace{a(x,y)f(z,w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{b(x,z)e(y,w)}_{\frac{1}{3}} \underbrace{c(x,w)d(y,z)}_{\frac{1}{3}} dx dy dz dw$$

$$\leq \|af\|_{L^3(\mathbb{R}^4)} \cdot \|be\|_{L^3(\mathbb{R}^4)} \|cd\|_{L^3(\mathbb{R}^4)}$$

e concludiamo osservando che

$$\begin{aligned} \|af\|_{L^3(\mathbb{R}^4)} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^4} a(x,y)^3 f(z,w)^3 dx dy dz dw \right\}^{1/3} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} a(x,y)^3 dx dy \cdot \int_{\mathbb{R}^2} f(z,w)^3 dz dw \right\}^{1/3} \\ &= \|a\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} \cdot \|f\|_{L^3(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

e idem per le altre due norme.

Oss. Quelli che abbiamo fatto sono riscalamenti "interni" o, in termini di grafico, ORIZZONTALI.
 Con riscalamenti verticali si possono contraddire disuguaglianze che non hanno la giusta omogeneità

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(x,y)^2 b(y,z)^3 c(z,x)^4 dx dy dz \leq \|a\|_{L^p}^\alpha \|b\|_{L^q}^\beta \|c\|_{L^r}^\gamma$$

Per quali α, β, γ e p, q, r è vera?

Se cambio $a(x,y)$ con $\lambda a(x,y)$ vediamo che

$$\hat{LHS} = \lambda^2 LHS \quad \hat{RHS} = \lambda^\alpha RHS \quad \leadsto \alpha = 2$$

e analogamente $\beta = 3$ e $\gamma = 4$.

Poi con i riscalamenti orizzontali trovo p, q, r .

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 35

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Spazi di Sobolev in generale $W^{m,p}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Definizioni

- W , con le derivate deboli (scaricando)
- H mediante approx./completamento
- rapporti incrementali

L'approccio W è comodo quando si passa al limite

L'approccio H è comodo per dimostrare "formule"

I rapporti incrementali sono comodi

- per fare dei conti quando le derivate non ci sono ancora
(vedi più avanti la regolarità ellittica)
- per definire gli spazi di Sobolev in ambienti "strani" ad esempio in spazi metrici (non lo vedremo mai)

Passaggio al limite Supponiamo $\{u_n\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$
 $\{v_n\} \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$

Supponiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto e $v_n = D^\alpha u_n$ per ogni n per un qualche multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u_\infty$$

$$v_n \rightarrow v_\infty$$

in qualche senso.

Vorrei tanto che $v_\infty = D^\alpha u_\infty$.

La definizione W torna comodissima! Per ipotesi

$$\int_{\Omega} u_n D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_n \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} u_\infty D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\infty \varphi \, dx \quad "$$

Quindi: per avere la tesi basta che $u_n \rightarrow u_\infty$ e $v_n \rightarrow v_\infty$ in un senso che permette di passare al limite negli integrali in cui ci si scontra con funzioni $C_c^\infty(\Omega)$.

Ad esempio basta e avanza la convergenza debole in $L^1(\Omega')$ per ogni aperto $\Omega' \subset \subset \Omega$. (In questo caso $D^i \varphi$ e φ sono chiaramente in $L^\infty(\Omega)$ e basta prendere $\Omega' \subset \subset \Omega$ che contenga il supporto di φ).

Oss. Chiedere che $\int_\Omega u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_\Omega u_\infty \varphi \, dx$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

è molto più debole che chiedere la conv. debole in $L^1(\Omega')$ su ogni $\Omega' \subset \subset \Omega$.

Morale: più rendo piccola la classe delle funzioni test, più diventa facile convergere, quindi si ottiene una nozione di convergenza sempre più debole.

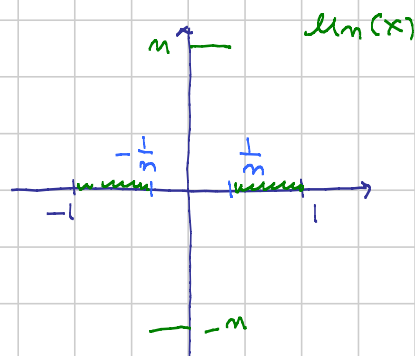
Esempio Trovare una successione $\{u_n\} \subseteq L^1((-1,1))$ tale che

$$\int_{-1}^1 u_n(x) \varphi(x) \, dx \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in C^0((-1,1))$$

una $u_n(x)$ non converge debolmente a 0 in $L^1((-1,1))$, cioè in particolare la relazione di sopra non vale $\forall \varphi \in L^\infty((-1,1))$.

Definiamo

$$u_n(x) := \begin{cases} n & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ -n & \text{se } x \in (-\frac{1}{n}, 0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Osserviamo che $\{u_n\} \subseteq L^1((-1,1))$ e

$$\|u_n\|_{L^1} = 2 \quad \forall n \geq 1. \quad \text{Quindi potrebbero avere lim. debole}$$

Esiste $\varphi \in L^\infty((-1,1))$ t.c. $\int_{-1}^1 u_n \varphi \not\rightarrow 0$

Basta prendere $\varphi(x) = 1$ se $x > 0$ e $\varphi(x) = 0$ se $x < 0$
(l'integrale vale sempre 1).

CLAIM $\int_{-1}^1 u_n \varphi \rightarrow 0$ per ogni $\varphi \in C^0((-1,1))$, anzi basta
che φ sia continua in $x=0$.

$$\int_{-1}^1 u_n \varphi = \underbrace{n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx}_{\downarrow \varphi(0)} - \underbrace{n \int_{-\frac{1}{n}}^0 \varphi(x) dx}_{\downarrow \varphi(0)} = 0$$

Per giustificare il 1° limite basta usare il teo. della media int.

$$n \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) dx = \varphi(x_n) \quad \text{per un qualche } x_n \in (0, \frac{1}{n})$$

Idem per il secondo.

— o — o —

L'integrazione per parti nella defn. W , fino a quali funzioni
test possiamo spingerla?

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad (*)$$

Se assumo che (*) sia vera $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, per quali altre
 φ sono sicuro che resta vera?

Tutte le volte che posso passare al limite. Ad esempio posso
arrivare fino a $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ e anche a tutte le φ che

- $\rightarrow$ hanno supporto compatto in Ω $\text{supp } \varphi \subseteq \Omega' \subset\subset \Omega$
- $\rightarrow$ ammettono una derivata debole $D^\alpha \varphi$ in Ω'

Questo si dimostra riconducendo alla def. H e W messe insieme.

Dalla definizione 1 per φ sappiamo che esistono $\{\varphi_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ tale che

- $\varphi_m \rightarrow \varphi$ in $L^1(\Omega')$
 - $D^\alpha \varphi_m \rightarrow D^\alpha \varphi$ in $L^1(\Omega')$
- } basta fare per convoluzione

Ad n fissato vale la relazione

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi_m dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi_m dx$$

Passare al limite non è gratis. SERVE QUALCOSA DI PIÙ.

Serve un qualche equi-bound che fornisca una dominazione, dal momento che possiamo sempre supporre

$$\varphi_m \rightarrow \varphi \quad \text{e} \quad D^\alpha \varphi_m \rightarrow D^\alpha \varphi \quad \text{puntualmente q.o.}$$

e in maniera dominata.

In quali ipotesi abbiamo una dominazione dei prodotti?

Ad esempio in 2 casi

→ se u e v sono pure in L^∞ (la dominazione per φ_m e per $D^\alpha \varphi_m$ diventa una dom. per $u D^\alpha \varphi_m$ e $v \varphi_m$)

→ se φ_m e $D^\alpha \varphi_m$ sono equilimitate, cosa che è vera ad esempio se φ e $D^\alpha \varphi$ sono continue a supp. cpt. (in questo caso i prodotti sono dominati da u e v per costante).

Achtung! Quando in dimensione $d \geq 2$ si ha a che fare con prodotti di funzioni di Sobolev, serve sempre qualche ipotesi per poter integrare il prodotto.

Achtung! Abbiamo già visto in dim 1 che non è possibile restringere la (*) a classi di funzioni + piccole di C_c^∞ , pena definire un altro oggetto.

— o — o —

La def. (H) ha due varianti

→ mediante approx.

→ mediante completamento astratto

La stessa cosa vale anche in un intervallo

Def. H1 Si dice che $u \in H^{1,p}((a,b))$ se $\exists \{u_n\} \subseteq C_c^\infty((a,b))$ t.c.

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \\ u_n &\rightarrow u \end{aligned} \quad \text{in } L^p((a,b))$$

Def. H2 $H^{1,p}((a,b)) =$ completamento astratto di $C_c^\infty((a,b))$ rispetto alla distanza indotta dalla norma

$$\|u\|_{1,p,(a,b)} = \|u\|_{L^p((a,b))} + \|u'\|_{L^p((a,b))}$$

Perché sono equivalenti? Sostanzialmente per le proprietà astratte del completamento di uno spazio metrico.

Chiamiamo $H^{1,p}((a,b))$ quello definito nel 1° modo. Per dimostrare che è il complet. astratto, basta trovare un'applic.

$$i: C_c^\infty((a,b)) \rightarrow H^{1,p}((a,b))$$

che sia una isometria e abbia immagine densa, ed entrambe le proprietà sono praticamente ovvie.

Teoria generale (vedi les. di Analisi 2). Se voglio dim. che uno sp. metrico $\mathcal{Y}$ è IL completamento di uno sp. metrico $\mathcal{X}$ devo

- dimostrare che $\mathcal{Y}$ è completo
- trovare una isometria $i: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ che abbia immagine densa

Nel vostro caso si tratta solo di verificare che $H^{1,p}((a,b))$ è chiuso come sottoinsieme di $L^p((a,b))$ e di conseguenza completo.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 36

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

$H \neq W$ nel caso $p = +\infty$

Setting: $d \geq 1$ intero, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto qualunque. Allora

$H^{1,\infty}(\Omega) =$ funzioni u di classe $C^1(\Omega)$ con u e ∇u limitati in Ω

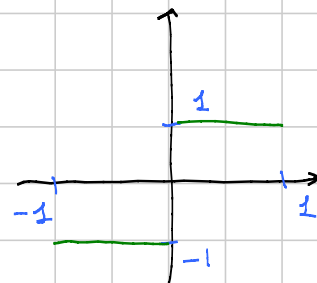
(Le derivate parziali esistono in senso classico e sono limitate in Ω)

$W^{1,\infty}(\Omega) =$ funzioni Lipschitziane in Ω detto così è falso

= funzioni in Ω che sono Lipschitziane con una costante comune in ogni palla contenuta in Ω .

Esempio Sia $\Omega = (-1,0) \cup (0,1) \subseteq \mathbb{R}$ e sia

$$u(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-1,0) \\ +1 & \text{se } x \in (0,1) \end{cases}$$

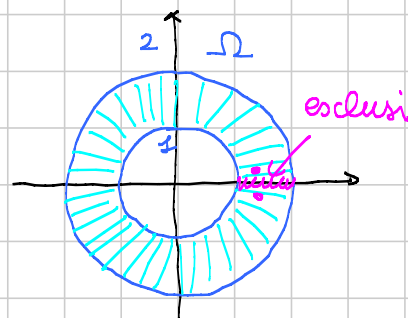


Si verifica che $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ con $\dot{u} \equiv 0$

e u non è Lip. in Ω (si verifica prendendo due punti del tipo $x = -\frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{n}$, oppure in astratto osservando che se fosse Lip, allora sarebbe estendibile ad una funzione continua sulla chiusura).

Achtung! Non è nemmeno vero che $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u$ è Lipschitziana nelle componenti connesse di Ω , perché non è vero nemmeno se $u \in C^1(\Omega)$ con derivata limitata.

Esempio $\Omega =$ corona circolare in $\mathbb{R}^2$ - punti con $x > 0$ e $y = 0$
 $u(x, y) =$ il θ delle coordinate polari



Si verifica che u è di classe C^∞ in Ω
 con ∇u limitato, ma u non è
 lipschitziana (se lo fosse, sarebbe
 estendibile alla chiusura in modo continuo)

Dim. caratterizzazione di $H^{1,\infty}(\Omega)$

Sia quindi $u \in H^{1,\infty}(\Omega)$. Per definizione esiste $\{u_m\} \subseteq C^\infty(\Omega)$
 tale che $u_m \in L^\infty(\Omega)$ e $\nabla u_m \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, e
 inoltre

$$u_m \rightarrow u \quad \text{in } L^\infty(\Omega)$$

$$\nabla u_m \rightarrow \nabla u \quad \text{in } L^\infty(\Omega)$$

Trattandosi di funzioni continue, la convergenza in $L^\infty(\Omega)$
 implica la convergenza uniforme, e quindi il risultato segue
 dai teoremi di scambio di Analisi 2.

Le limitatezza di u e ∇u seguono dalla limitatezza delle
 succ. approssimanti (le succ. convergenti sono limitate).

Dim. che $W^{1,\infty} \Rightarrow$ lip. sulle palle

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia $\bar{B}(x_0, r) \subseteq \Omega$ una palla chiusa
 contenuta, sia $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Allora u è lip. in $\bar{B}(x_0, r)$ e più precisamente

$$|u(y) - u(x)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} |y - x| \quad \forall (x, y) \in [\bar{B}(x_0, r)]^2$$

Dim. Consideriamo le convoluzioni $u_\varepsilon := (u * \rho_\varepsilon)$
 Per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo sono ben definite in $\bar{B}(x_0, r)$

e inoltre $\nabla u_\varepsilon = \nabla u * \rho_\varepsilon$ (nel senso che vale componente per componente)

da cui

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall x \in \bar{B}(x_0, r)$$

Quindi a ε fissato le u_ε sono Lipschitziane e soddisfano

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| &\leq \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(\bar{B}(x_0, r))} |y - x| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} |y - x| \quad (*) \end{aligned}$$

per ogni x e y in $\bar{B}(x_0, r)$. Ora vorrei passare al limite. In che senso $u_\varepsilon \rightarrow u$? In generale questo è vero in tutti gli $L^p(\bar{B}(x_0, r))$ con $p < +\infty$, ma non in L^∞ .

(vale più in generale che $u_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ se u_ε è stata definita come la convoluzione dell'estesa $\hat{u}$).

In realtà però posso applicare AA in $\bar{B}(x_0, r)$ poiché le u_ε sono equi-lip. ed equi-limitate (convoluzioni di una funzione L^∞). Ne segue che esiste $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$ t.c.

$$u_{\varepsilon_k}(x) \rightarrow v(x) \quad \text{unif. in } \bar{B}(x_0, r)$$

↑ per forza sarà $u(x)$

A questo possiamo passare al limite nella (*) e ottenere la Lip. di u con la costante richiesta.

Oss. Questa in fondo è la dimostrazione del teo. di immersione nel caso $p = +\infty$ indipendentemente dalla regolarità di Ω (ma la tesi è solo "locale", cioè in ogni palla contenuta in Ω).

Domanda: dove fallisce la dim. di convergenza delle convoluzioni nel caso $p = +\infty$?

Implicazione restante Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che esista $L \in \mathbb{R}$ t.c. per ogni $B(x_0, r) \subset \Omega$ vale la stima

$$|u(y) - u(x)| \leq L |y - x| \quad \forall (x, y) \in [B(x_0, r)]^2.$$

Allora ∇u esiste in senso W e soddisfa $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ e

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L.$$

Dim. Usiamo i rapporti incrementali. Fissiamo $B(x_0, r) \subset \Omega$, e fissiamo $i \in \{1, \dots, d\}$. Allora per ogni ρ sufficientemente piccolo il rapp. incrementale

$$\frac{u(x + \rho e_i) - u(x)}{\rho}$$

è ben definito per ogni $x \in B(x_0, r)$ e soddisfa la stima

$$\left| \frac{u(x + \rho e_i) - u(x)}{\rho} \right| \leq L \quad (\text{quindi sta in } L^\infty(B(x_0, r)) \text{ con cost. indep. da } \rho)$$

Ora per ogni $\varphi \in C_c^\infty(B(x_0, r))$ vale una specie di integrazione per parti discreta! (vedi def. su regole ellittica)

$$\int_{B(x_0, r)} \frac{u(x + \rho e_i) - u(x)}{\rho} \varphi(x) dx = - \int_{B(x_0, r)} u(x) \frac{\varphi(x - \rho e_i) - \varphi(x)}{-\rho}$$

Non ci passano al limite in questa uguaglianza.

Al RHS abbiamo che

$$\frac{\varphi(x - \rho e_i) - \varphi(x)}{-\rho} \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \quad \text{unif. in } \bar{B}(x_0, r)$$

quindi

$$\text{RHS} \rightarrow - \int_{B(x_0, r)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

Al LHS i rapp. funz. sono una famiglia di funzioni limitate in $L^\infty(\Omega)$, quindi esiste $R_k \rightarrow 0$ t.c.

$$\frac{u(x + R_k e_i) - u(x)}{R_k} \xrightarrow{*} v(x) \text{ debole } * \text{ in } L^\infty(B(x_0, r))$$

(o si usa il fatto per ora misterioso in L^∞ , oppure si prende il limite debole in L^2 e si dimostra che sta in L^∞)

A questo punto

$$\text{LHS} \rightarrow \int_{B(x_0, r)} v(x) \varphi(x) dx.$$

Per definizione W questo ci dice che $v(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$.

In questo modo abbiamo anche dimostrato che

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq L.$$

Per concludere servirebbero 2 cose:

→ se $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ esiste in tutte le palle ed è in norma $\leq L$, allora vale lo stesso su tutto Ω . Queste sono le proprietà di riincollamento nei Sobolev (vedi sez. successiva)

→ Tutto il gradiente ha norma $\leq L$. Per far questo occorre introdurre i "rapporti incrementali direzionali"

$$\frac{u(x + R w) - u(x)}{R} \quad \text{dove} \quad \|w\| = 1$$

Questi hanno norma $\leq L$ e tendono a $\langle \nabla u(x), w \rangle$.

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 37

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Rincollamento di funzioni di Sobolev

Dati A e B due aperti in $\mathbb{R}^d$, e data $u : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial u}{\partial x_i} &= v \quad \text{in } A \\ \bullet \frac{\partial u}{\partial x_i} &= w \quad \text{in } B \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ll} D^\alpha u = v & \text{in } A \\ D^\alpha u = w & \text{in } B \end{array} \right. \text{ con } \alpha \text{ multi-indice}]$$

Allora v e w coincidono in $A \cap B$.

Inoltre $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ esiste in $A \cup B$ ed è quella che ci aspettiamo, cioè

$$[D^\alpha u] \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \begin{cases} v & \text{in } A \\ w & \text{in } B \end{cases} \quad (\text{ben posto perché nell'intersezione coincidono})$$

Più in generale se $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti in $\mathbb{R}^d$ e $D^\alpha u = v_i$ per ogni $i \in I$, allora $D^\alpha u$ esiste in $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ ed è quella che ci aspettiamo.

Step 1 Ipotesi: $v = D^\alpha u$ in A e $w = D^\alpha u$ in B

Tesi: $v = w$ in $A \cap B$

Supponiamo solo $u, v, w \in L^1_{loc}$ degli aperti corrispondenti

Prendiamo $\varphi \in C_c^\infty(A \cap B)$ e abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B} v \varphi &= \int_A v \varphi = \int_A D^\alpha u \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_A u D^\alpha \varphi \\ &\quad \uparrow \text{supp } \varphi \subseteq A \cap B \quad \uparrow v = D^\alpha u \text{ in } A \quad \uparrow \text{def. di } D^\alpha \quad \quad \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{A \cap B} u D^\alpha \varphi \\ &= \int_B w \varphi = \int_B D^\alpha u \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_B u D^\alpha \varphi \end{aligned}$$

Mettendo insieme troviamo

$$\int_{A \cap B} (v-w) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(A \cap B)$$

FLCV $\Rightarrow v = w$ q.o. in $A \cap B$.

Step 2 "Rincollando" v e w (ora posso) ottengo $D^\alpha u$ in $A \cup B$
Devo dim. che

$$\int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{A \cup B} D^\alpha u \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(A \cup B)$$

SE sapessimo che $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, con $\varphi_1 \in C_c^\infty(A)$ e $\varphi_2 \in C_c^\infty(B)$, allora sarebbe fatta, perché

$$\int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi \, dx = \int_{A \cup B} u D^\alpha (\varphi_1 + \varphi_2) \, dx = \int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi_1 \, dx + \int_{A \cup B} u D^\alpha \varphi_2 \, dx$$

$$= \int_A u D^\alpha \varphi_1 \, dx + \int_B u D^\alpha \varphi_2 \, dx = (-1)^{|\alpha|} \left\{ \int_A v \varphi_1 \, dx + \int_B w \varphi_2 \, dx \right\}$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \left\{ \int_{A \cup B} v \varphi_1 \, dx + \int_{A \cup B} w \varphi_2 \, dx \right\} = (-1)^{|\alpha|} \int_{A \cup B} D^\alpha u (\varphi_1 + \varphi_2) \, dx$$

Lemma Ogni $\varphi \in C_c^\infty(A \cup B)$ si può scrivere come $\varphi_1 + \varphi_2$ come sopra.

Dim (Ripare argomento delle partizioni dell'unità di tipo B)

Step 1 Poniamo $A_k := \{x \in A : B(x, \frac{1}{k}) \subseteq A\}$

$$B_k := \{x \in B : B(x, \frac{1}{k}) \subseteq B\}$$

Osserviamo che

$$\bigcup_{k \geq 1} (A_k \cup B_k) = A \cup B \quad (\text{unione crescente})$$

Essendo il supporto di φ compatto, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $\text{supp } \varphi \subseteq A_{k_0} \cup B_{k_0}$

Step 2 Sia $\theta_1 \in C_c^\infty(A)$ t.c. $\theta_1(x) = 1 \quad \forall x \in A_{k_0}$
 $0 \leq \theta_1(x) \leq 1 \quad \forall x \in A$

Sia $\theta_2 \in C_c^\infty(B)$ t.c. $\theta_2(x) = 1 \quad \forall x \in B_{k_0}$
 $0 \leq \theta_2(x) \leq 1 \quad \forall x \in B$

Possiamo pensare ψ_1 e ψ_2 come $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Poniamo ora

$$\psi_1(x) := \theta_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$\psi_2(x) := \theta_2(x)(1 - \theta_1(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

CLAIM: $\psi_1(x) + \psi_2(x) = 1$ per ogni $x \in A_{k_0} \cup B_{k_0}$.

Infatti $\psi_1(x) + \psi_2(x) = 1 \Leftrightarrow \theta_1(x) + \theta_2(x) - \theta_1(x)\theta_2(x) - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (1 - \theta_1(x))(\theta_2(x) - 1) = 0$

Ora su $A_{k_0} \cup B_{k_0}$ almeno uno dei 2 fattori si annulla.

Allora per ogni $x \in \text{supporto di } \varphi$ vale che

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x) \cdot 1 = \varphi(x) (\psi_1(x) + \psi_2(x)) \\ &= \underbrace{\varphi(x) \psi_1(x)}_{\substack{\varphi_1(x) \\ \in C_c^\infty(A)}} + \underbrace{\varphi(x) \psi_2(x)}_{\substack{\varphi_2(x) \\ \in C_c^\infty(B)}} \end{aligned}$$

Dim ricollamento in generale $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i, u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Ipotesi : $u_i = D^{\alpha} u$ in Ω_i

Tesi : Se u_i si ricollano per definire una $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con
 $u(x) = u_i(x)$ per quasi ogni $x \in \Omega_i$ e
 $u = D^{\alpha} u$ in Ω

Il fatto che si rincollino è conseguenza dello step 1.

Dallo Step 2 per inclusione segue che $D^\alpha u = v$ in ogni unione FINITA di Ω_i .

Per passare all'unione qualunque devo dim che

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int_{\Omega} v \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

ma ogni φ di questo ha il supporto contenuto in una unione FINITA di Ω_i ; e quindi mi riduco al p.to precedente.

Compatibilità classica in $\mathbb{R}^2$ Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto.

Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo che u_x e u_y esistano in senso debole in Ω e siano funzioni CONTINUE.

Allora u è di classe C^1 e si tratta di derivate vere.

In dim. 1 si mostrava che u era una primitiva della derivata debole. Supponendo $\Omega = \mathbb{R}^2$, verrebbe da porre

$$U(x, y) = \int_0^x u_x(t, y) dt \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Questa definizione presenta un paio di problemi

- u_x è definita a meno di insiemi di misura NULLA in $\mathbb{R}^2$, quindi $u_x(t, y)$ potrebbe non essere definita per nessun $t \in \mathbb{R}$
- questa definizione assume che il segmento di estremi $(0, y)$ e (x, y) è tutto contenuto in Ω , il che in generale non sarà vero.

Supponendo anche di aver definito U , avremmo che

$$\int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) \varphi_x(x, y) = - \int_{\mathbb{R}^2} u_x(x, y) \varphi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x, y) \varphi_x(x, y)$$

$\uparrow$ integr. per parti in x a y fissato $\uparrow$ defn. di u_x

Mettendoli insieme troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \{U(x,y) - u(x,y)\} \varphi_x(x,y) dx dy = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$$

e a questo punto servirebbe un DBR con le derivate parziali per dedurre che $U(x,y) - u(x,y)$ dipende solo dalla y . Insomma ... mille problemi.

Procediamo per convoluzione. Scegliamo tre aperti

$$\Omega'' \subset \subset \Omega' \subset \subset \Omega$$

Consideriamo $\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega' \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega' \end{cases}$

Poniamo $u_m(x) = \hat{u} * \rho_{1/m}$
 $\uparrow$ solito nucleo di convoluzione

Allora

$$u_m \rightarrow \hat{u} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^2)$$

e in particolare

$$u_m \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega'') \text{ e in } L^1(\Omega').$$

Inoltre

$$u_{mx} = u_x * \rho_{1/m} \quad \text{in } \Omega'' \text{ per } m \text{ grande}$$

$$u_{mx} \rightarrow u_x \quad \text{uniformemente in } \Omega''$$

$\uparrow$ poiché u_x è continua

$$u_{my} \rightarrow u_y \quad \text{unif. in } \Omega''$$

Quindi u_{mx} e u_{my} sono equicontinui, quindi se u sono equilipschitz e convergono puntualmente (a meno di s.succ.) in almeno un p.to di Ω'' .

A questo punto è il teo. di scambio delle derivate di Analisi 2. Essendo Ω' e Ω'' arbitrari, è fatta.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 38

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto **CONNESSO**. Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Supponiamo che $Du = 0$ (vettore nullo)
 $\uparrow$ derivate deboli di ordine 1

Allora u è costante in Ω .

Cannone Visto che TUTTE le deriv. deboli di ordine 1 sono continue, allora $u \in C^1$ e a questo punto è Analisi 2.

Esiste una dimostrazione più diretta? No, sembra che bisogna comunque passare attraverso le convoluzioni, come nella compatibilità classica.

Dato $x_0 \in \Omega$, consideriamo due palle $B(x_0, r) \subset B(x_0, R) \subset \Omega$
 $\uparrow u \in L^1$ qui

Estendiamo u a 0 fuori di $B(x, R)$. In questo modo $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$
 Ora facciamo le convoluzioni $\uparrow$ estesa.

$$u_\varepsilon = \hat{u} * \rho_\varepsilon$$

Per le proprietà delle convoluzioni

$$u_\varepsilon \rightarrow \hat{u} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^d)$$

$$\hat{Du} * \rho_\varepsilon \rightarrow \hat{Du} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^d)$$

$\nwarrow$
 $\nearrow$
 estesa di Du ottenuta ponendo
 a 0 fuori di $B(x_0, R)$

} questi due fatti
 valgono in generale
 assumendo solo
 u e Du in $L^1(B(x_0, R))$

Dalla prima deduciamo che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(B(x_0, R))$ ed in particolare, a meno di s.succ., la convergenza è pure puntuale in quasi ogni punto.

Dalla seconda possiamo dedurre lo stesso, che però non è interessante fino a quando non osserviamo che

$$\hat{D}u * p_\varepsilon = D(\hat{u} * p_\varepsilon) = Du_\varepsilon \quad \text{in } B(x_0, 1)$$

$\uparrow$ *tecnica di scambio* $\uparrow$ *palla piccolo*

per ε piccolo ($\varepsilon \leq R-1$).

Ora sappiamo che

$$Du_\varepsilon \rightarrow Du \quad \text{in } L^1(B(x_0, 1)).$$

$\uparrow$ *piccola*

Fino qui sono tutti fatti generali, che usano solo u e Du sono $L^1_{loc}(\Omega)$.

Sapendo che $Du = 0$, possiamo dedurre che

$$Du_\varepsilon = \hat{D}u * p_\varepsilon = 0 \quad \text{in } B(x_0, 1) \text{ se } \varepsilon \leq R-1$$

quindi per ε piccolo le u_ε sono costanti in $B(x_0, 1)$ e quindi il loro limite L^1 è costante

(Fatto generale: u_ε costanti, $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1 \Rightarrow u$ costante)

Questo dimostra che u è localmente costante, quindi globalmente costante se Ω è connesso (esercizio di topologia)

— o — o —

Ingredienti per approx. DELUXE.

Come ottenere supp. compatto Sia $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

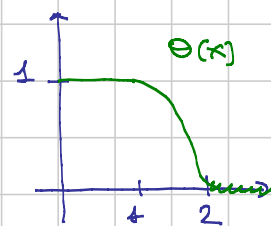
Allora esiste $\{u_n\} \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ t.c.

$$\|u - u_n\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \rightarrow 0$$

e tutte le u_n hanno supporto compatto, cioè $u_n \equiv 0$ al di fuori di una palla il cui centro dipende ovviamente da n .

Dim. Prendo cutoff come in figura e poniamo

$$u_R(x) := u(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{R}\right)$$



È chiaro che $u_R \equiv 0$ fuori da $B(0, 2R)$ e $u_R \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ per il lemma smooth per Sobolev.

Dico che, per $R \rightarrow +\infty$,

$$D^\alpha u_R \rightarrow D^\alpha u \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^d)$$

per ogni multiindice con $|\alpha| \leq m$.

Verifichiamo per $u=0$ e $u=1$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x) - u_R(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p \left\{ 1 - \theta\left(\frac{x}{R}\right) \right\}^p dx \rightarrow 0$$

$\downarrow$ puntuale e
 $\circ$ dominato

Osservo che $D u_R(x) = D(u(x) \cdot \theta(\frac{x}{R}))$

$$= D u(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{R}\right) + \frac{1}{R} u(x) \theta'\left(\frac{x}{R}\right) (1, \dots, 1)$$

$\downarrow$
 $D u$

$\downarrow$
 $\circ$

Su entrambi i termini c'è convergenza puntuale dominata.

Quindi la conclusione segue ponendo $u_m = u_{R_m}$ con $R_m \rightarrow +\infty$.

Come regolarizzare?

Convulsione!

APPROX DELUXE IN $\mathbb{R}^d$

Data $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, esiste $\{u_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c. $\|u - u_m\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \rightarrow 0$

1° modo

Prima regolarizzo, poi aggiusto i supporti

Fisso un intero $m \geq 1$.

Step 1 Posso $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ e scegliendo ε piccolo trovo che

$$\|u_\varepsilon - u\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2m}$$

Step 2 Prendo μ_ε data dallo step 1 e considero

$$\mu_{\varepsilon,R}(x) := \mu_\varepsilon(x) \cdot \Theta\left(\frac{x}{R}\right)$$

Se R è abbastanza grande, avendo che $\|\mu_{\varepsilon,R} - \mu_\varepsilon\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$.

Mettendo insieme: $\|\mu_{\varepsilon,R} - \mu\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{n}$

↑
la chiamo μ_n .

2° modo Prima aggiusto i supporti, poi regolarizzo

Fisso $n \geq 1$ intero

Step 1 Per ogni $R > 0$ pongo $\mu_R(x) := \mu(x) \cdot \Theta\left(\frac{x}{R}\right)$.

Se R è abbastanza grande ho

$$\|\mu - \mu_R\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$$

Step 2 Visto μ_R ricevuto dallo step 1, pongo $\mu_{R,\varepsilon} = \mu_R * \rho_\varepsilon$ e per ε piccolo ottengo

$$\|\mu_R - \mu_{R,\varepsilon}\|_{m,p,\mathbb{R}^d} \leq \frac{1}{2n}$$

↑ continua ad avere supp. cpt.
perchè lo aveva μ_R (al max si
è allargato di ε)

Come prima pongo $\mu_n := \mu_{R,\varepsilon}$.

Lo stesso argomento funziona per l'approssimazione low-cost nel caso di un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ non necessariamente limitato

Seguiamo la prima via: prima regolarizzo, poi aggiusto i supporti

(Oss: così non serve il smooth. Sobolev)

Estendo u a 0 fuori di Ω . Così ottengo $\hat{u}$.
Fisso $n \geq 1$ intero

Step 1 Considero le convoluzioni $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$.
Trovo un $\varepsilon \in (0, \frac{1}{n})$ abbastanza piccolo t.c.
 $\uparrow \uparrow$ **IMPORTANTE**

$$\|\hat{u} - (\hat{u} * \rho_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\|D\hat{u} - (D\hat{u} * \rho_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

$\uparrow$
estesa delle derivate prime

Step 2 Vista da u_ε dello Step 1, che è $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, consideriamo

$$u_{\varepsilon,R}(x) := u_\varepsilon(x) \cdot \theta\left(\frac{x}{R}\right)$$

Allora esiste $R \geq n$ tale che
 $\uparrow \uparrow$ Apparentemente non serve.

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

$$\|Du_\varepsilon - Du_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$\|\hat{u} - u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{n}$$

Ora voglio togliere le estese. La prima replica banalmente

$$\|u - u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad (\text{basta restringere tutto ad } \Omega)$$

Vediamo cosa accade per le derivate.

Per troppo le 2 disuguaglianze

$$\|\hat{D}u - (\hat{D}u * \rho_\varepsilon)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

↑↑

$$\|\underbrace{D(\hat{u} * \rho_\varepsilon)}_{\uparrow \uparrow} - D u_{\varepsilon,2}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$$

non sono immediatamente "triangolabili".

Appena fissiamo $\Omega' \subset\subset \Omega$, non appena ε è abbastanza piccolo, avremo che

$$\hat{D}u * \rho_\varepsilon = D(\hat{u} * \rho_\varepsilon) \quad \text{in } \Omega'$$

e allora potremo applicare la triangolare.

Quindi ponendo $u_n := u_{\varepsilon,2}$ come ottenuto alla fine dello step 2, possiamo concludere che

$$\|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

e, fissato $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$\|Du - Du_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{non appena} \quad B(x, \frac{1}{n}) \subset \Omega \quad \forall x \in \Omega'$$

il che accade definitivamente in quanto abbiamo scelto $\varepsilon \in (0, \frac{1}{n})$.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 39

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Riscaldamento orizzontale e immersioni di Sobolev

Sia $d \geq 1$ intero, e sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Per ogni $\lambda > 0$ consideriamo

$$\hat{\varphi}(x) := \varphi(\lambda x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Come cambiano le norme di φ quando passo a $\hat{\varphi}$?

→ Norme della funzione

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\lambda x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\lambda^d} \varphi(y) dy$$

$\uparrow$
 $y = \lambda x$
 $dy = \lambda^d dx$

e analogamente

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(x)|^p dx = \frac{1}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p dx$$

da cui

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{\lambda^{d/p}} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

→ Norme del gradiente
e quindi

$$\nabla \hat{\varphi}(x) = \nabla [\varphi(\lambda x)] = \lambda \nabla \varphi(\lambda x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \hat{\varphi}(x)|^p dx = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi(x)|^p dx$$

da cui

$$\|\nabla \hat{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Gli esponenti nelle immersioni pure sono gli unici possibili.

Supponiamo che

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, q, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Questa formula deve valere per φ e per ogni $\hat{\varphi}$, quindi

$$\frac{1}{\lambda^{d/q}} \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, q, d) \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Gli esponenti di λ devono essere uguali, altrimenti trovo un assurdo per $\lambda \rightarrow 0^+$ oppure per $\lambda \rightarrow +\infty$, quindi

$$-\frac{d}{q} = 1 - \frac{d}{p} \quad \leadsto \quad \frac{d}{p} - \frac{d}{q} = 1 \quad \leadsto \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{d} \quad \leadsto \quad \boxed{q = p^*} \quad d > p$$

→ Norme di derivate successive Basta osservare che

$$D^\alpha \hat{\varphi}(x) = D^\alpha [\varphi(\lambda x)] = \lambda^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(\lambda x)$$

da cui

$$\|D^\alpha \hat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \frac{\lambda^{|\alpha|}}{\lambda^{d/p}} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Se imponiamo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq c(p, q, d, m) \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

con lo stesso argomento troviamo

$$-\frac{d}{q} = m - \frac{d}{p} \quad \leadsto \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{m}{d} \quad \leadsto \quad \boxed{q = \frac{mp}{d - mp}} \quad d > mp$$

→ Costanti di α -Hölder

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x)| &= |\varphi(\lambda y) - \varphi(\lambda x)| \leq \text{Hold}_\alpha(\varphi) |\lambda x - \lambda y|^\alpha \\ &= \lambda^\alpha \text{Hold}_\alpha(\varphi) |x - y|^\alpha \end{aligned}$$

$$\text{Hold}_\alpha(\tilde{\varphi}) = \lambda^\alpha \text{Hold}_\alpha(\varphi)$$

Supponiamo di avere una disuguaglianza pura del tipo

$$\text{Hold}_\alpha(u) \leq C(p, d, \alpha) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

se è vera per φ e per $\tilde{\varphi}$ deve essere

$$\lambda^\alpha \text{Hold}_\alpha(\varphi) \leq C(p, d, \alpha) \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

e quindi deve necessariamente essere

$$\alpha = 1 - \frac{d}{p} \quad p > d$$

FUNZIONI RADIALI

Sia $R > 0$ un numero reale

Sia $f: (0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misur.

Sia $d \geq 1$ un intero e sia $\Omega = B(0, R)$ in $\mathbb{R}^d$

Poniamo

$$u(x) := f(|x|) \quad \forall x \in B(0, R)$$

Domanda: regolarità Sobolev di u in termini della regolarità Sobolev di f .

Regolarità L^p

$$\int_{B(0, R)} |u(x)|^p dx$$

si può calcolare usando
l'analogo d -dimensionale
delle coordinate polari/sferiche

Si ottiene

$$\int_{B(0,R)} |u(x)|^p dx = c(d) \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr$$

↑
costante che dipende solo dalla dimensione
= misura $(d-1)$ -dimensionale del bordo
della palla unitaria di $\mathbb{R}^d$
(pensare ai casi $d=1,2,3$)

e quindi

$$u \in L^p(B(0,R)) \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$$

Oss. Tutti i risultati valgono anche nel caso $\Omega = \mathbb{R}^d$ con $R = +\infty$.

Regolarità $W^{1,p}$

Chi è ∇u ? Formalmente

$$\nabla u(x) = \nabla [\varphi(|x|)] = \varphi'(|x|) \nabla(|x|) = \varphi'(|x|) \frac{x}{|x|}$$

↑
vettore di norma 1

da cui

$$\int_{B(0,R)} |\nabla u(x)|^p dx = \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr$$

e quindi

$$|\nabla u| \in L^p(B(0,R)) \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty$$

e di conseguenza

$$u \in W^{1,p}(B(0,R)) \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \\ \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \end{cases}$$

Regolarità $W^{m,p}$ Come sono fatte le derivate successive di u ?

La formula diventa orribile da scrivere!

1° fatto Per ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vale una scrittura del tipo

$$D^\alpha |x| = \frac{P_\alpha(x)}{|x|^{2|\alpha|-1}} \quad \leftarrow \text{opportuno polinomio di grado } |\alpha| \text{ in } x \text{ omogeneo}$$

Dim "Semplice" inclusione ☺

$$\text{2° fatto} \quad D^\alpha u(x) = \sum_{k=1}^{|\alpha|} \varphi^{(k)}(|x|) \frac{P_{\alpha,k}(x)}{|x|^{2k-1}} \quad \leftarrow \text{opportuni polinomi di grado } k \text{ in } x \text{ omogeneo}$$

dove $\varphi^{(k)}(|x|)$ è moltiplicata per un termine che nell'origine si comporta come $\frac{1}{|x|^{k-1}}$

Dim Altrettanto "semplice" inclusione ☺

Mettendo insieme

$$u \in W^{m,p}(B(0,R)) \iff \begin{cases} \int_0^R |\varphi(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \\ \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \\ \int_0^R \frac{|\varphi''(r)|^p}{r^p} r^{d-1} dr < +\infty \\ \vdots \\ \int_0^R \frac{|\varphi^{(m)}(r)|^p}{r^{p(m-1)}} r^{d-1} dr < +\infty \end{cases}$$

Oss. Bisogna però dimostrare per bene enunciati del tipo

Se $\varphi \in L^1_{loc}((0,R))$ e ha derivata debole $\varphi' \in L^1_{loc}((0,R))$, allora
 $u \in W^{1,p}(B(0,R)) \iff$ convergono i due integrali previsti

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 40

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Consideriamo $B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f \in C^1(0, R)$.

Poniamo

$$u(x) = f(|x|).$$

Allora

$$u \in W^{1,p} \Leftrightarrow \int_0^R \{ |f(r)|^p + |f'(r)|^p \} r^{d-1} dr < +\infty$$

e in tal caso $\nabla u(x) = f'(|x|) \frac{x}{|x|}.$

Dim. Dobbiamo dimostrare che $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$

$$\int_{B(0,R)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{B(0,R)} \overbrace{f'(|x|) \frac{x_i}{|x|}}^{\text{presunta}} \varphi(x) dx$$

per ogni indice $i \in \{1, \dots, d\}$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(B(0, R))$.

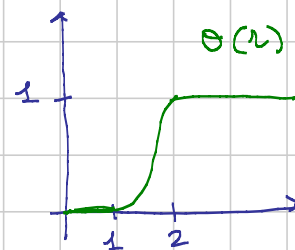
Già sappiamo dalla lezione precedente che u e il presunto ∇u stanno in $L^p(B(0, R))$.

Sarebbe la classica integrazione per parti se fosse che $u \in C^1(B(0, R))$ ma potenzialmente ci sono pbm. in $x=0$ (sia per colpa di f , sia per colpa di $\frac{x}{|x|}$).

Idea: spostarsi un po' lontano da 0!!

Consideriamo una Θ come in figura e poniamo

$$\varphi_r(x) := \varphi(x) \cdot \Theta\left(\frac{|x|}{r}\right)$$



Osserviamo che $\varphi_r(x) = 0$ in $B(0, 1)$ e che $\varphi_r(x) = \varphi(x)$ fuori da $B(0, 2r)$.

Di conseguenza possiamo usare l'integr. per parti per φ_r , quindi

$$\int_{B(0,R)} u(x) \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\underbrace{C(r,R)}_{\text{corona di raggio } r \text{ ed } R}} u(x) \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}(x) dx$$

$$= - \int_{C(r,R)} f(|x|) \frac{x_i}{|x|} \varphi_r(x) dx$$

↑
in $C(r,R)$ la funzione $u \in C^1$

Ora bisogna passare al limite per $r \rightarrow 0^+$. Nel RHS c'è convergenza puntuale dominata. Nel LHS occorre calcolare

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \theta\left(\frac{|x|}{r}\right) + \varphi(x) \theta'\left(\frac{|x|}{r}\right) \cdot \frac{1}{r} \frac{x_i}{|x|}$$

Moltiplicando per u e integrando in $B(0,R)$, il primo termine passa al limite per conv. puntuale (q.o. cioè in questo caso per $x \neq 0$). Il secondo termine è

$$\int_{B(0,R)} u(x) \varphi(x) \theta'\left(\frac{|x|}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{x_i}{|x|} dx$$

CLAIM: 2° termine $\rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0^+$.

Osserviamo che l'integrale in realtà è in $C(r,2r)$ perché altrimenti $\theta' = 0$.

Idea: aggiungo e tolgo $\varphi(0)$.

$$\int_{C(r,2r)} u(x) \varphi(0) \theta'\left(\frac{|x|}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{x_i}{|x|} dx$$

e questo è identicamente nullo perché l'integrandola è dispari rispetto alla variabile x_i

L'altro termine lo maggioro con

$$\frac{1}{R} \int_{C(r, 2r)} |u(x)| \cdot \underbrace{|\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\leq L|x|} \cdot \underbrace{\left| \theta' \left(\frac{|x|}{2} \right) \right|}_{\text{limitato}} dx$$

$\leq L \cdot 2r$
 perché φ è Lipschitziana

$$\leq \text{cost.} \cdot \int_{C(r, 2r)} |u(x)| dx \xrightarrow{0 \quad 0 \quad 0} 0 \quad \text{per puntuale dominata}$$

Esercizio Dimostrare un risultato analogo assumendo solo $f \in L'_{\text{loc}}((0, R))$ e $f' \in L'_{\text{loc}}((0, R))$ + convergenza degli integrali.

(Si tratta di approssimare f con funzioni C^∞ e ragionare come nel caso precedente).

Esercizio Dati $d \geq 1$ intero, $p \geq 1$ reale, $\alpha > 0$ reale, $R > 0$ reale. Stabilire quando accade che

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(B(0, R))$$

Per la caratterizzazione precedente, poniamo $f(r) = \frac{1}{r^\alpha}$ e ci riduciamo a verificare che

$$f'(r) = -\alpha \frac{1}{r^{\alpha+1}}$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^{\alpha p}} \cdot r^{d-1} < +\infty ;$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^{(\alpha+1)p}} r^{d-1} < +\infty .$$

La seconda condizione è + restrittiva e porta a

$$(\alpha+1)p - d + 1 < 1 \quad \leadsto \quad (\alpha+1)p < d \quad \leadsto \quad \alpha < \frac{d}{p} - 1$$

$$\text{Osserviamo che } \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^q(B(0, R)) \Leftrightarrow \alpha q < d \Leftrightarrow \alpha < \frac{d}{q}$$

Se invece volessimo $\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{2,p}(B(0,R))$ dovremmo aggiungere

$$\int_0^R \frac{|f''(r)|^p}{r^p} r^{d-1} dr \quad f''(r) \sim \frac{1}{r^{\alpha+2}} \quad \text{a meno di costanti}$$

e quindi la condizione diventa

$$\int_0^R \frac{1}{r^{(\alpha+2)p} \cdot r^p} r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\text{cioè} \quad (\alpha+2)p + p - d + 1 < 1 \Leftrightarrow (\alpha+3)p < d$$

Sembra ragionevole che

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{m,p}(B(0,R)) \Leftrightarrow (\alpha+2m-1)p < d$$

Esercizio Dimostrare che per ogni $p < d$ esiste $u \in W^{1,p}(B(0,R))$ ma $u \notin L^q(B(0,R))$ per ogni $q > p_*$.

1° tentativo Uso funzioni radiali $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$. Sarebbe

$$(\alpha+1)p < d \quad \text{e} \quad \alpha \geq \frac{d}{q} \quad \forall q > p_*$$

↓

$$\alpha < \frac{d}{p} - 1 \quad \text{e} \quad \alpha \geq \frac{d}{q}$$

Sono compatibili? $\frac{d}{q} \leq \alpha < \frac{d}{p} - 1$. Trovo un tale α se

$$\frac{d}{q} < \frac{d}{p} - 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{d-p}{pd} \quad \rightsquigarrow \quad q > \frac{pd}{d-p} = p_*$$

Non appena $q > p_*$ è fatta, nel senso che

$\forall q > p_*$ trovo un α buono, quindi trovo $u \in W^{1,p} \setminus L^q$
 $\uparrow$ dipendente da q .

Rilancio: posso ottenere una u che va bene per ogni $q > p_*$.

SLOGAN: usare i logaritmi !!!

Brutalmente, voglio $u \in L^{p_*}$ molto al limite

Una scelta è $u(x) = \frac{1}{|x|^{d/p_*} \cdot |\log x|}$
 $\uparrow$ aiuta la convergenza

Poniamo quindi $\varphi(r) = \frac{1}{r^{d/p_*} \cdot |\log r|}$ (supponiamo $R \in (0, 1)$)

e verifichiamo le 2 proprietà richieste

$$1: \int_0^R |\varphi(r)|^q r^{d-1} dr = +\infty \quad \forall q > p_*$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^{dq/p_*} |\log r|^q} r^{d-1} dr = \int_0^R \frac{1}{r^{dq/p_* - d + 1} |\log r|^q} dr$$

$\uparrow \uparrow$
 > 1 , quindi diverge

$$2: \int_0^R \{ |\varphi(r)|^p + |\varphi'(r)|^p \} r^{d-1} dr < +\infty$$

Per la parte con $|\varphi(r)|$ non ci sono problemi perché l'esponente di r è < 1 . Per $\varphi'(r)$ ci sono due termini

$$\frac{1}{r^{\frac{d}{p_*} + 1} |\log r|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r^{d/p_*} |\log r|^2} r$$

Dal punto di vista dell'esponente di r sono simili.

Quando elevo alla p l'esponente di r diventa

$$\left(\frac{d}{p_*} + 1 \right) p - d + 1 \quad \text{e questo è} \leq 1 \text{ se e solo se}$$

$$\left(\frac{d}{p_*} + 1 \right) p - d \leq 0 \quad \text{e dovrebbe essere} = \text{più defn di } p_*$$

Grazie al $\log r$ che avanza al denominatore l'integrale converge.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 41

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Un classico: $W^{1,d}(\Omega)$ non si immerge in $L^\infty(\Omega)$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

1° fatto: mancanza di stime per $p \neq d$ Dimostriamo che per $p \neq d$ non si può avere una stima del tipo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq c(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Dim Riscaldamento orizzontale. Consideriamo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e per ogni $\lambda > 0$ consideriamo

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(\lambda x).$$

Si vede che

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

e

$$\|\nabla \tilde{\varphi}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} \|\nabla \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

Se valesse la stima dell' enunciato avremmo che

$$\|\varphi\|_{L^\infty} = \|\tilde{\varphi}\|_{L^\infty} \leq c(p,d) \|\nabla \tilde{\varphi}\|_{L^p} = \frac{\lambda}{\lambda^{d/p}} c(p,d) \|\nabla \varphi\|_{L^p}.$$

Se $\frac{d}{p} \neq 1$, cioè $p \neq d$, allora si ottiene un assurdo per $\lambda \rightarrow +\infty$ oppure per $\lambda \rightarrow 0^+$.

2° fatto: mancanza di stime per $p = d$ Anche per $p = d$ la stima di sopra non è possibile.

Dim Se fosse vera per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora sarebbe vera anche per ogni $u \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$, semplicemente ragionando per approssimazione ($u_n \rightarrow u$ deluxe, ma allora $\{\nabla u_n\}$ è di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$, ma allora $\{u_n\}$ è di Cauchy in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$)

Basta trovare controesempio in $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ e lo cerchiamo RADIALE.
Poniamo

$$u(x) := \begin{cases} 1 - |x|^\alpha & \text{se } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È evidente che $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 1$. Ora

$$\nabla u(x) = -\alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x}{|x|} \quad \text{se } x \in B(0,1)$$

e quindi $|\nabla u(x)| = \alpha |x|^{\alpha-1}$ e integrando

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^d dx &= \int_{B(0,1)} |\nabla u(x)|^d dx = \alpha^d \int_{B(0,1)} |x|^{(\alpha-1)d} dx \\ &= \alpha^d \int_0^1 r^{(\alpha-1)d} \cdot r^{d-1} dr = \alpha^d \int_0^1 \frac{1}{r^{1-\alpha d}} dr \\ &= \frac{\alpha^d}{\alpha d} [r^{\alpha d}]_0^1 = \frac{\alpha^{d-1}}{d} \end{aligned}$$

e infine $\|\nabla u\|_{L^d} = \frac{1}{d^{1/d}} \alpha^{1-\frac{1}{d}}$.

Se fosse vera la disuguaglianza di potenza, allora

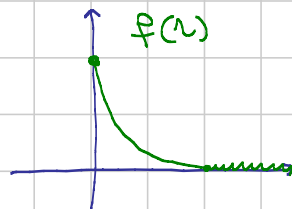
$$1 = \|u\|_{L^\infty} \leq C(p,d) \|\nabla u\|_{L^d} = C(p,d) \frac{1}{d^{1/d}} \alpha^{1-\frac{1}{d}}$$

Appena $d \geq 2$, questa è assurda quando $\alpha \rightarrow 0^+$

3° fatto Esiste $R > 0$ ed esiste $u \in W^{1,d}(B(0,R))$, ma $u \notin L^\infty(B(0,R))$

Dim. tentativo Cerchiamo un esempio radiale del tipo

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \quad \text{per un qualche } \alpha > 0$$



Gratis: non sta in $L^\infty(B(0,R))$ per ogni $R > 0$.
Vediamo se sta in $W^{1,d}$. Come al solito ci si riduce a

$$\int_0^R |f'(r)|^d \cdot r^{d-1} dr \quad \text{dove ora } f(r) = \frac{1}{r^\alpha}, \text{ cioè}$$

$$\alpha^d \int_0^R \frac{1}{r^{(\alpha+1)d}} r^{d-1} dr = \alpha^d \int_0^R \frac{1}{r^{1+\alpha d}} dr$$

e purtroppo questo diverge per ogni $\alpha > 0$, quindi non va bene.

Idea: trovare qualcosa che diverga "ancora meno".

SLOGAN: usa i logaritmi!

Dim, 2° tentativo $u(x) = |\log|x||^\alpha$



Certamente $u \notin L^\infty(B(0,R))$ per ogni $R > 0$. Vediamo se sta in $W^{1,d}$.

$$f(r) = |\log|r||^\alpha \rightsquigarrow |f'(r)| = \alpha |\log|r||^{\alpha-1} \frac{1}{r}$$

$$\int_0^R |f'(r)|^d r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow \int_0^R \alpha^d |\log|r||^{(\alpha-1)d} \frac{1}{r^d} \cdot r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{1}{r} \frac{1}{|\log|r||^{(1-\alpha)d}} dr < +\infty \Leftrightarrow (1-\alpha)d > 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 1 - \frac{1}{d}$$

Ad esempio, se prendiamo $\alpha = \frac{1}{3}$, allora siamo sicuri di avere un controesempio che funziona per ogni $d \geq 2$.

— o — o —

Osservazione Notare la differenza tra i vari enunciati

→ fatto 2: non so stimare $\|u\|_{L^\infty}$ con $\|\nabla u\|_{L^d}$ **NON STIMABILITÀ**

→ fatto 3: esiste u con $\nabla u \in L^d$ ma $u \notin L^\infty$. **NON ESISTENZA**

Le due cose sono più collegate di quanto si potrebbe pensare

(Brutale: SE LO SO STIMARE, ALLORA IN QUALCHE MODO ESISTE)

Oss. È facile costruire controesempi su tutto $\mathbb{R}^d$: basta moltiplicare $|\log|x||^{1/3}$ per una cutoff nulla al di fuori di una palla centrata nell'origine.

Ottimalità delle stime sulle costanti di Hölder

Già visto: se vale una disuguaglianza del tipo

$$\text{Höld}_\alpha(u) \leq C(\alpha, d, p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

↑ costante di α -Hölder
di u in $\mathbb{R}^d$

allora per forza $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$ e $p > d$.

Mostriamo ora che esiste $u \in W^{1,p}(B(0,R))$ che non è β -Hölderiana per ogni $\beta > 1 - \frac{d}{p}$

(Ulteriore esempio di non stimabilità $\Rightarrow$ non esistenza)

Primo tentativo Consideriamo $u(x) = |x|^\alpha$ con $\alpha = 1 - \frac{d}{p}$.

Questa è α -Hölderiana, ma non β -Hölderiana per $\beta > \alpha$.
Vediamo se sta in $W^{1,p}(B(0,R))$

$$f(r) = |r|^\alpha \rightsquigarrow |f'(r)| = \alpha |r|^{\alpha-1}$$

$$u \in W^{1,p} \Leftrightarrow \int_0^R |f'(r)|^p r^{d-1} dr < +\infty \Leftrightarrow \alpha^p \int_0^R r^{(\alpha-1)p} r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 1-d-\alpha p + p < \infty \Leftrightarrow \alpha p > p-d \Leftrightarrow \alpha > 1 - \frac{d}{p}.$$

Quindi questa funzione non sta in $W^{1,p}$.

Secondo tentativo (Usa i logaritmi!!) Proviamo con

$$u(x) = \frac{|x|^\alpha}{|\log|x||} \quad \text{con } \alpha = 1 - \frac{d}{p}$$

↑ problemi per $|x|=1$, quindi $R = \frac{1}{2}$

Vediamo se sta in $W^{1,p}(B(0, 1/2))$.

$$f(r) = \frac{r^\alpha}{|\log r|} \rightsquigarrow |f'(r)| = \left| \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\log r} + \frac{r^\alpha}{|\log r|^2} \frac{1}{r} \right|$$

$$= \text{due termini del tipo } \frac{r^{\alpha-1}}{|\log r|} \text{ e } \frac{r^{\alpha-1}}{|\log r|^2}$$

Quando elevo alla p mi riduco agli integrali

$$\int_0^{1/2} \frac{r^{(\alpha-1)p}}{|\log r|^p} r^{\alpha-1} dr \quad \text{e questo va bene, cioè converge,}$$

perché resta

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{r |\log r|^p} dr. \quad \text{Il secondo integrale è ancora meglio}$$

perché ha $2p$ all'esponente del log.

Con un conto di Analisi 1 si verifica che u è α -Hölderiana ma non β -Höld per $\beta > \alpha$.

Oss. La funzione del secondo tentativo è "un po' più Höld" di quella del primo, un di poco.

RIASSUNTO DELLA LEZIONE: potenza dei logaritmi nel costruire i controesempi nei casi critici

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 42

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio ispirato da teo. cum. cpt. Sia $d \geq 1$ intero.

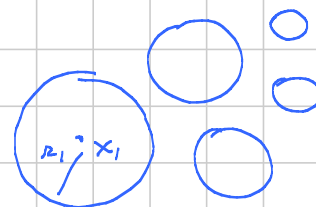
Sia Ω una unione numerabile di palle disgiunte

$$\Omega := \bigcup_{m=1}^{\infty} B(x_m, r_m)$$

Allora

$$\text{meas}(\Omega) = c(d) \sum_{m=1}^{\infty} r_m^d$$

↑
misura della palla unitaria



Consideriamo $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ che è costantemente uguale a λ_m in ogni $B(x_m, r_m)$. È evidente che $\nabla u \equiv 0$ in Ω (riincollamento). Inoltre

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left\{ c(d) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^p r_m^d \right\}^{1/p}$$

Fissato p , possiamo fare in modo che $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ e che $u \in L^q(\Omega)$ se e solo se $q \leq p$.

Ad esempio, se prendiamo $p = \frac{7}{7}$, possiamo porre

$$\lambda_m^{\frac{7}{7}} r_m^d = \frac{1}{m \log^2 m} \leftarrow \text{serie che converge a stento}$$

$$\text{e } r_m = \frac{1}{m}, \text{ cioè } \lambda_m = \left\{ \frac{m^{d-1}}{\log^2 m} \right\}^{\frac{1}{7/7}}.$$

Con queste definizioni è chiaro che $\text{meas}(\Omega) < +\infty$ (se $d \geq 2$) e $u \in W^{1, \frac{7}{7}}(\Omega)$. Inoltre se $q > \frac{7}{7}$ otteniamo

$$\int_{\Omega} |u(x)|^q dx = c(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^d} \cdot \lambda_m^q = c(d) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^d} \left(\frac{m^{d-1}}{\log^2 m} \right)^{\frac{q}{7/7}} = +\infty$$

↑
l'esponente di m è < 1

Perché l'esponente di n al denominatore è < 1 ?

L'esponente è

$$d - \frac{q}{q-1} (d-1) = \left(1 - \frac{q}{q-1}\right) d + \frac{q}{q-1}$$

Per $q = \frac{d}{d-1}$ viene 1 ed è una funzione decrescente di q .

Conseguenza 1: in questo insieme Ω non valgono le immersioni

Se valersero, poiché $u \in W^{1, \frac{d}{d-1}}(\Omega)$ dovrebbe essere anche in un L^p migliore, ma abbiamo appena dimostrato che non ci sta!!

— o — o —

Sempre pensando alle stesse palle $B(x_n, r_n)$ costruiamo u_n in maniera che sia $\neq 0$ solo in $B(x_n, r_n)$, dove è costante λ_n . Scegliamo λ_n in modo che $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \text{costante}$

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} = \|u_n\|_{L^p(B(x_n, r_n))} = \lambda_n \{c(d) r_n^d\}^{1/p} = c(d)^{\frac{1}{p}} \lambda_n r_n^{\frac{d}{p}}$$

Ci basta porre $\lambda_n := r_n^{-\frac{d}{p}}$

Con la scelta di sopra le u_n sono limitate in $W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre possiamo anche fare Ω limitato, e non solo di misura finita.

Domanda: $\{u_n\}$ è una successione compatta in qualche L^q ?

Risposta: di certo non è compatta in $L^p(\Omega)$, perché se lo fosse sarebbe di Cauchy (almeno una s.succ.), ma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)|^p dx &= \lambda_m^p c(d) r_m^d + \lambda_n^p c(d) r_n^d \\ &= \text{costante} \neq 0 \quad \text{se } m \neq n. \end{aligned}$$

Conseguenza 2: non vale in Ω l'immersione compatta $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ (stesso p)

Altra domanda: la successione $\{u_n\}$ è rel. cpt. in $L^q(\Omega)$ per qualche $q < p$?

Risposta: $u_n \rightarrow 0$ in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p$, quindi sì.
Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_n(x)|^q dx &= \lambda_n^q c(d) \Omega_n^d = c(d) \Omega_n^d \Omega_n^{-\frac{dq}{p}} \\ &= c(d) \Omega_n^{d(1-\frac{q}{p})} \end{aligned}$$

Ora l'esponente di Ω_n è > 0 e $\Omega_n \rightarrow 0$ perché la misura è finita.

Ultima domanda: u_n è limitata in $L^q(\Omega)$ per qualche $q > p$?

Risposta: No perché resta Ω_n elevato ad esponente negativo.

- Conseguenze
- ① Ω ha misura finita, ma in questo aperto non valgono i teoremi di immersione
 - ② L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ NON è compatta
 - ③ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ potrebbe essere cpt. per ogni $q < p$.

Come si spiega tutto ciò alla luce di Rellich-Kondrachov?

→ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ non richiede particolari ipotesi su Ω

→ Compattezza in L^1 + limitatezza in $L^p \Rightarrow$ compattezza in L^q per ogni $q < p$ (interpolazione a fine teorema Rk)
Questo dice che ③ è vera.

→ Per dimostrare la compattezza dell'immersione negli L^q con $q > p$ (fino a p escluso) serve regolarità di Ω per avere immersioni.

Esempio 2 Dominio con una cuspid

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$



In questo Ω non valgono le immersioni come uno se le aspetta (volendo è un mondo parallelo in cui valgono immersioni con esponenti diversi)

Prendiamo $u(x,y) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$ (l'idea è che u ha problemi grossi in $(0,0)$, ma l'insieme è "piccolo" e quindi "pesano meno").

Vediamo in quali $L^q(\Omega)$ e quali $W^{1,p}(\Omega)$ sta

$$u \in L^q \Leftrightarrow \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^{\alpha q}} < +\infty \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha q - 2}} dx < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha q - 2 < 1 \Leftrightarrow q < \frac{3}{\alpha}$$

Analogamente

$$u \in W^{1,p} \Leftrightarrow u_x \in L^p \Leftrightarrow \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^{(\alpha+1)p}} < +\infty$$

$$\Leftrightarrow p < \frac{3}{\alpha+1}$$

Prendiamo ad esempio $\alpha=1$. Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p < \frac{3}{2}$.
Di conseguenza possiamo aspettarci

$$u \in L^q(\Omega) \quad \forall q < \left(\frac{3}{2}\right)^* = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$\frac{pq}{d-p} = \frac{2p}{2-p}$$

ma invece abbiamo verificato che questo vale solo per $q < 3$.

Altro esempio analogo : in $\mathbb{R}^2$ troviamo funzioni non limitate solo in $W^{1,p}$ con $p \leq 2$ (dopo scatta l'immersione in $L^\infty + \text{Hölder}$)

Vediamo che accade in Ω .

La funzione $\frac{1}{|x|^\alpha}$ è NON limitata per ogni $\alpha > 0$, ma se

uso α piccolo sta praticamente in $W^{1,3}(\Omega)$.

Detto meglio: $\forall p < 3 \exists \alpha > 0$ t.c. $\frac{1}{|x|^\alpha} \in W^{1,p}(\Omega)$

o in altri termini: $\forall p < 3 \quad W^{1,p}(\Omega) \not\rightarrow L^\infty(\Omega)$

Cosa accade per $p=3$?

Proviamo con $\log x =: u(x, y)$

$$\int_{\Omega} |u_x|^3 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{x^3} = \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad (\text{☹})$$

Non ci arrendiamo e proviamo $|\log x|^{1/2}$ in modo che

$$u_x = \frac{1}{2} \frac{1}{|\log x|^{1/2}} \frac{1}{x} \quad \text{a meno dei segni}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_x|^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} \frac{1}{|\log x|^{3/2}} \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1}{x |\log x|^{3/2}} dx < +\infty \quad (\text{☺}) \end{aligned}$$

Quindi nemmeno $W^{1,3}(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$.

Congettura $W^{1,p}(\Omega)$ si immerge in $L^\infty(\Omega)$ (e pure meglio) se $p > 3$.



Esercizio ☺



Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 43

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Teorema (RELLICH - KONDRACHOV) (vedi les. 36 1stAM 19/20)

Sia $d \geq 1$ un intero. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto **LIMITATO** per cui valgono i teoremi di immersione (si usa alla fine). Sia $p \geq 1$.

↑
chiuso $+\infty$

Caso $p < d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ è COMPATTA per ogni $q < p^*$ (minore **STRETTO**)

↑
Connetti dopo video

Caso $p = d$ L'immersione di sopra è COMPATTA per ogni $q \in [1, +\infty)$

↑
escluso

Caso $p > d$ L'immersione $W^{1,p}(\Omega) \rightarrow C^0(\text{clos}(\Omega))$ è COMPATTA.

Def. Siano X e Y spazi metrici e sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Si dice che f è **COMPATTA** se manda limitati in relativamente compatti.

Detto con le succ: per ogni $\{x_n\} \subseteq X$ limitata in X , la succ. $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ delle immagini ha s.succ. cov. in Y .

Dim. **Caso $p > d$** Praticamente è A.A. classico. Infatti bound su $\|u\|_{1,p,\Omega}$ produce un bound su $\|u\|_{\infty(\Omega)}$ e sulle costanti di Hölder.

Caso $p = d$ Facile. Dato $q < +\infty$, esiste $\hat{p} < d$ tale che $q < (\hat{p})^*$ (basta osservare che $(\hat{p})^* \rightarrow +\infty$ quando $\hat{p} \rightarrow d^-$)

Bound su $\|u\|_{1,p,\Omega}$ produce bound su $\|u\|_{1,\hat{p},\Omega}$ (qui uso che Ω è limitato) e ora uso il risultato per $\hat{p} < d$.

Caso $p < d$ Questo è il caso vero. Cosa devo fare? Data

$$\mathcal{M} := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{1,p,\Omega} \leq M\}$$

devo dimostrare che $\mathcal{Y}$ è rel. cpt. in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$
(fare con le famiglie è + comodo che con le succ.)

ROAD MAP → Iniziare con il caso $q=1$
→ Concludere con solito trucco di interpolazione

Caso $q=1$ L'idea è dim. che $\mathcal{Y}$ soddisfa hp di AA. versione L^1 .
Le prime due ipotesi (Ω limitato e $\|u\|_{L^1(\Omega)}$ limitato) sono
ovvie. Resta da verificare che $\uparrow$ [Esponente corretto dopo video]

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall R \in \mathbb{R}^d \quad |R| \leq \delta \Rightarrow \|\tau_R \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Step 1 Dato $k \geq 1$ intero, poniamo

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega : \begin{array}{l} \overline{B}(x, \frac{1}{k}) \subseteq \Omega \\ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \end{array} \right\}$$

e osserviamo che

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k) \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

(sono insiemi decrescenti a $\cap$ vuota contenuti in un Ω limitato (basterebbe misura finita)).

Step 2 Dimostriamo che $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{p'}}$$

$\uparrow$ *borderino*

$$\text{LHS} \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x+R)| dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| dx$$

Stimiamo il secondo (il primo è analogo)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_k} |\hat{u}(x)| \cdot 1 dx &\leq \|\hat{u}\|_{L^p(\Omega \setminus \Omega_k)} \cdot \|1\|_{L^{p'}(\Omega \setminus \Omega_k)} \\ &\stackrel{\uparrow \frac{1}{p}}{\leq} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} \stackrel{\uparrow \frac{1}{p'}}{\leq} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Step 3 Dim. che per $|R| \leq \frac{1}{K}$ vale la stima

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq |R| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{1/p}$$

↑
interno

Supponiamo $u \in C^\infty(\Omega)$. Allora se $x \in \Omega_k$ e $|R| \leq \frac{1}{K}$, allora $x+R \in \Omega$ e $x \in \Omega$ e quindi

$$|\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| = |u(x+R) - u(x)| \quad (\text{Pongo } \psi(t) := u(x+Rt))$$

$$= |\psi(1) - \psi(0)|$$

$$= \left| \int_0^1 \psi'(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |\psi'(t)| dt$$

$$= \int_0^1 |\langle \nabla u(x+Rt), R \rangle| dt$$

$$\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} |R| \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt$$

Integro in dx :

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+R) - \hat{u}(x)| dx \leq |R| \int_{\Omega_k} dx \int_0^1 |\nabla u(x+Rt)| dt$$

$$= |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega_k} |\nabla u(\underbrace{x+Rt}_y)| dx$$

$$\stackrel{dx=dy}{=} |R| \int_0^1 dt \int_{\underbrace{\Omega_k+Rt}_{\subseteq \Omega}} |\nabla u(y)| dy$$

$$\leq |R| \int_0^1 dt \int_{\Omega} |\nabla u(y)| dy$$

$$= |R| \int_{\Omega} |\nabla u(y)| \cdot \underbrace{1}_{\frac{1}{p}} dy$$

Applicando Hölder otteniamo che

$$\int_{\Omega_k} |\hat{u}(x+\mathcal{R}) - \hat{u}(x)| dx \leq |\mathcal{R}| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega)\}^{\frac{1}{p'}}$$

Se u è solo $W^{1,p}(\Omega)$, allora la approssimo low-cost con delle $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e fatto passa al limite (forse potrebbe servire di staccarsi ulteriormente dal bordo per avere la convergenza dei gradienti: CONTROLLARE)

Step 4 Conclusione in $L^1(\Omega)$. Mettendo insieme gli step 2 e 3 si ottiene

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mathcal{R}} \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega)} &= \|\dots\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} + \|\dots\|_{L^1(\Omega_k)} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^p(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{p'}} \quad 1^\circ \\ &\quad + |\mathcal{R}| \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \{\text{meas}(\Omega)\}^{\frac{1}{p'}} \quad 2^\circ \end{aligned}$$

Verifichiamo per bene che $\hat{u}$ soddisfa hp (iii) di A.A L^1 .

- Ci viene dato $\varepsilon > 0$
 - Scegliamo k t.c. $1^\circ \leq \frac{1}{2} \varepsilon$
 - Visto k , scegliamo $\delta \in (0, \frac{1}{k}]$ t.c. $2^\circ \leq \frac{1}{2} \varepsilon$ appena $|\mathcal{R}| \leq \delta$
- Così abbiamo finito

Achtung! Nel caso $p=1$, non è vero che il 1° termine va a 0 perché $\frac{1}{p'} = 0$.

In questo caso occorre essere più astuti nello step 1 e dim. che

$$\|\tau_{\mathcal{R}} \hat{u} - \hat{u}\|_{L^1(\Omega \setminus \Omega_k)} \leq 2 \|u\|_{L^{\hat{p}}(\Omega)} \{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_k)\}^{\frac{1}{\hat{p}'}}$$

Scegliendo $\hat{p} > 1$ per cui ancora $u \in L^{\hat{p}}(\Omega)$ (ce ne sono fino a 1^*)

Caso con $q < p_*$ generico

SLOGAN: Limitato in L^{p_*} e convergente in L^1 } Ω limitato
 implica convergente in L^q per ogni $q < p_*$

Segue dalla disuguaglianza di interpolazione: fissati $1 < q < p_*$ esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^\alpha \cdot \|u\|_{L^{p_*}(\Omega)}^{1-\alpha}$$

Facile conseguenza di Hölder

Come si conclude?

Se $\{u_n\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, allora

- u_n è limitata in $L^{p_*}(\Omega)$ (qui si usano le immersioni)

- $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in $L^1(\Omega)$

e quindi $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in $L^q(\Omega)$.

— o — o —

L'ESEMPIO Nel caso $q = p_*$ Ω di immersione NON è compatta.

Dim Per riscalamento

Step 1 Esiste $\{x_n\} \subseteq \Omega$ e $\{r_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c.

$B(x_n, r_n) \subseteq \Omega$ e a 2 a 2 disgiunte



Step 2 Scelgo $\varphi \in C_c^\infty(B(0,1))$ non identic. nulla e la riscalo

$$u_n(x) = \lambda_n \varphi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right) \in C_c^\infty(B(x_n, r_n))$$

$\uparrow$
 scelgo in modo che $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$

Step 3 Osservo che $\|u_n\|_{L^p(\Omega)}$ sono equilimitate, anzi vanno a 0 (lo stesso vale per tutti le $\|u_n\|_{L^q(\Omega)}$ con $q < p_*$)

Per questo occorre fare il conto

Step 4 Osservo che $\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ sono COSTANTI (sembra un miracolo, ma è la def di p^* che produce questo)

Step 5 Concludo osservando che $\|u_m\|_{1,p,\Omega}$ sono equiimitate, ma $\{u_m\}$ non ha s.succ. conv. in $L^{p^*}(\Omega)$ perché non ha s.succ. di Cauchy, essendo

$$\int_{\Omega} |u_m(x) - u_n(x)|^{p^*} dx = \int_{\Omega} |u_m(x)|^{p^*} dx + \int_{\Omega} |u_n(x)|^{p^*} dx$$

↑
i supporti sono disgiunti se $m \neq n$

= 2 costante per ogni $m \neq n$.

— o — o —

Conto da fare: trovare λ_m in funzione di λ_n .

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 44

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

TRACCE DI FUNZIONI DI SOBOLEV

(Vedi IstAM 2019/20 - L37)

Problema : data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, vogliamo definire $u|_{\partial\Omega}$ o più in generale $u|_K$ con $K \subseteq \Omega$ sottoinsieme "d-1 dimensionale".

Stiamo quindi cercando $\text{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \text{Spazio}(\partial\Omega)$ con le seguenti proprietà

- Lineare
- sulle funzioni $\in C^0(\text{clos}(\Omega))$ è la restrizione
- stima del tipo

$$\|\text{Tr } u\|_{\text{spazio}(\partial\Omega)} \leq C(p, d, \Omega) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

- Formula di integrazione per parti
- Se $u_n \rightarrow u_\infty$ in qualche senso in Ω , allora $\text{Tr } u_n \rightarrow \text{Tr } u_\infty$ in $\text{Spazio}(\partial\Omega)$.

Osservazioni

SLOGAN: le tracce non sono continue se $p=1$

- ① $\Omega = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ la risposta è banale se $p > 1$ (in tal caso le $W^{1,p}$ sono Hölder e i valori puntuali sono definiti fino al bordo)
- ② $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto regolare e $p > d$ (ancora una volta le $W^{1,p}$ sono Hölder fino al bordo). Question: serve il bordo regolare?
- ③ Se $u \in L^p(\Omega)$ e basta, allora non è possibile definire la traccia (meno banale di quanto sembra)

CASO MODELLO IMPORTANTE

$$d \geq 2, \quad p < d, \quad \Omega = \mathbb{R}_+^d$$

semispazio

$$\mathbb{R}_+^d := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y > 0\}$$

Proposizione Per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valgono le seguenti stime

$$\textcircled{1} \quad \|u(x, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p) \|u\|_{d,p, \mathbb{R}_+^d}$$

IMPURA, con
RHS solo in $\mathbb{R}_+^d$

- u è definita su tutto $\mathbb{R}^d$
- il LHS ha norma in $\mathbb{R}^{d-1}$ (il bordo)
- il RHS ha norma in $\mathbb{R}_+^d$

$$\textcircled{2} \quad \|u(x, 0)\|_{L^{\hat{p}_*}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

PURA
RHS su tutto $\mathbb{R}^d$

dove

$$\hat{p}_* := \frac{p(d-1)}{d-p} \quad \leftarrow \text{dim. del bordo} \quad (\hat{p}_* > p \text{ se } p > 1)$$

$\textcircled{3}$ Per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ vale

$$\|u(x, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C(p, d, q) \|u\|_{d,p, \mathbb{R}_+^d}$$

IMPURA

Dim Step 1 Come per le immersioni, partiamo con $p=1$

$$u(x, 0) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy \quad \begin{array}{l} \text{(non sarebbe } \infty, \text{ ma in } \mathbb{R} \\ \text{abbastanza grande)} \\ \text{" } u(x, R) - u(x, 0) \end{array}$$

$$|u(x, 0)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dy$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} dy \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx \int_0^{+\infty} dy |\nabla u(x, y)| = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}_+^d)} \end{aligned}$$

potrei mettere la
sola $\frac{\partial u}{\partial y}$
↑

Step 2 Conquisto p generico. Applico step 1 a

$$\varphi'(x) = (n+1)|x|^n$$

$$v(x, y) = |u(x, y)|^n u(x, y) = \varphi(u(x, y))$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \varphi'(u(x, y)) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = (n+1)|u(x, y)|^n \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

Dallo step 1 deduciamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)|^{n+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |v(x, y)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right| dx dy \\ &= (n+1) \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^n \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right| dx dy \\ &\leq (n+1) \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^{\frac{np}{p-1}} dx dy \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dx dy \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Scego $n = p-1$ e ottengo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |u(x, 0)|^p dx &\leq p \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} |u(x, y)|^p dx dy \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^d} \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^p dx dy \right\}^{1/p} \\ &\leq \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d}^{p-1} \|u\|_{L^p, \mathbb{R}_+^d} \end{aligned}$$

Da qui ho finito

Step 3 Scegliamo n in modo tale che $\frac{np}{p-1} = p_* = \frac{pd}{d-p}$

Allora la disuguaglianza diventa

$$\begin{aligned} \|u(x, 0)\|_{L^{n+1}(\mathbb{R}^{d-1})} &\leq (n+1) \underbrace{\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}_+^d)}^n}_{\leq (pd) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^n} \underbrace{\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+^d)}}_{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}} \end{aligned}$$

Da qui basta elevare alla $\frac{1}{r+1}$. Chi è $r+1$?

Farendo i conti si ottiene $r = \frac{d(p-1)}{d-p}$ da cui $r+1 = \frac{p(d-1)}{d-p} = \hat{p}_*$

Osservazione Abbiamo usato

$$\|u\|_{L^{\hat{p}_*}(\mathbb{R}_+^d)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq c(p,d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$\uparrow$ ovvia $\uparrow$ immersione pura su tutto lo spazio

Step 4 La stima nei $q \in [p, \hat{p}_*]$ segue per interpolazione.

Teorema Sia $d \geq 2$ intero, e sia $p \in [1, +\infty]$.

Allora per ogni $q \in [p, \hat{p}_*]$ esiste unica

$$\text{Tr}: W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d) \rightarrow L^q(\mathbb{R}^{d-1})$$

con le proprietà richieste

→ lineare,

→ $[\text{Tr} u](x) = u(x, 0)$ se $u \in C^0 \cap W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$

→ valgono le stime come nella prop.

→ vale la formula di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} u(x,y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) dx dy = - \int_{\mathbb{R}_+^d} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \varphi(x,y) dx dy$$

$$- \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{u(x,0)}_{[\text{Tr} u](x)} \varphi(x,0) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (non solo per $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^d)$)

$\uparrow$
(e in realtà anche per φ meno regolari)

Dim Come defisco $\text{Tr } u$?

- Prendo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^d)$
- La estendo per parità a $\hat{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$
- Approssimo $\hat{u}$ deluxe con $\{u_n\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$
- Osservo che $\{u_n\}$ è di Cauchy nella $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}^d}$, dunque anche nella $\|\cdot\|_{1,p,\mathbb{R}_+^d}$ (full norm)
- Per la proposizione $\{u_n(x,0)\}$ è di Cauchy in $L^q(\mathbb{R}^{d-1})$
- Definisco $\text{Tr } u$ come il limite di questa successione.

È ben posta, cioè il limite dipende dalla mia scelta? No!

Solito trucco: se $\{u_n\}$ sono altre approx, allora la succ. alternata $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, \dots$ è ancora di Cauchy, e idem le sue restrizioni al bordo.

Linearità e stime Ovvie per passaggio al limite

Cocidenza se $u \in C^0(\mathbb{R}_+^d)$ L'estesa $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

e la posso approx. per convoluzione e moltiplicazione per cutoff in modo da avere supporto compatto.

Le approx. convergono unif. sui compatti di $\mathbb{R}^d$, quindi le restrizioni convergono a $u(x,0)$ unif. sui cpt. di $\mathbb{R}^{d-1}$.
Il limite è lo stesso che in L^q .

Integrazione per parti Vale per le approx. $u_n(x,y)$ e poi si passa al limite.

Infatti la convergenza L^p ed L^q si traducono in conv. puntuali q.o. dominate a meno di s.succ., e questo basta ed avanza per passare al limite negli integrali.

Oss. Nei RHS posso mettere norme solo su $\mathbb{R}_+^d$ se tengo conto del fattore 2 che viene fuori dai ribattamenti

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 45

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

EXTENDER

SLOGAN: i casi da capire sono $(0,1) \rightarrow (-1,1)$
 $(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Esempio 0 (riscaldamento) $\pm$ -extender $(0,+\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$

Data $u: (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ consideriamo $Eu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$[Eu](x) = u(|x|) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x > 0 \\ u(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Claim: E è un $\pm$ -extender e ovviamente

$$[Eu]'(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x > 0 \\ -u'(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} u'(x) \\ -u'(-x) \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{se ci esiste in} \\ \text{qualche senso} \\ \text{debole} \end{array}$$

Dici Devo dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} Eu(x) \cdot \dot{\varphi}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} [Eu]'(x) \cdot \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Riscrivo LHS e RHS usando solo $(0,+\infty)$:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{-\infty}^0 u(-x) \dot{\varphi}(x) dx + \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\varphi}(x) dx = \int_0^{+\infty} u(x) (\dot{\varphi}(x) + \dot{\varphi}(-x)) dx \\ &\quad \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\varphi}(-x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= - \int_{-\infty}^0 (-u'(-x)) \varphi(x) dx - \int_0^{+\infty} u'(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} u'(x) (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx \quad \text{conviucersi dei segni!} \end{aligned}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_0^{+\infty} u'(x) \varphi(x) dx$$

dove $\varphi(x) := \varphi(x) - \varphi(-x)$

L'uguaglianza di sopra sarebbe banale se $\psi \in C_c^\infty((0, +\infty))$, ma in generale non sarà vero.

Brutal mode: se possiamo ad Analisi 1 (tutto regolare), allora

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u(x) \psi'(x) dx &= \int_0^M u(x) \psi'(x) dx \\ &= [u(x) \psi(x)]_0^M - \int_0^M u'(x) \psi(x) dx \\ &= u(M) \psi(M) - u(0) \psi(0) - \int_0^M u'(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

Varrebbe la formula che vogliamo se fosse $\psi(0) = 0$, cosa che nel nostro caso è vera.

Idea: la formula di integrazione per parti che vorremmo vale anche se $\psi(0) = 0$.

Il discorso si sistema con la solita θ come in figura. Poniamo

$$\psi_n(x) := \psi(x) \theta(nx)$$

e osserviamo che $\psi_n \in C_c^\infty((0, +\infty))$ (ci siamo staccati da 0)

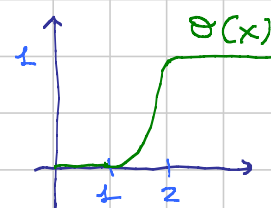
Allora per defn. di u' che è derivata debole:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u(x) \psi_n'(x) dx &= - \int_0^{+\infty} u'(x) \psi_n(x) dx \\ \int_0^{+\infty} u(x) \psi'(x) \theta(nx) dx &= - \int_0^{+\infty} u'(x) \psi(x) \theta(nx) dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} u(x) \psi(x) n \theta'(nx) dx \end{aligned}$$

↓ puntuale dominata

Al LHS abbiamo 2 termini

$$\int_0^{+\infty} u(x) \psi'(x) \theta(nx) dx \rightarrow \int_0^{+\infty} u(x) \psi'(x) dx \quad \text{puntuale dominata}$$



Per il 2° termine osserviamo che ψ è lip. in $\mathbb{R}$ e si annulla in 0, quindi

$$\int_0^{+\infty} |u(x)| \cdot \underbrace{|\psi(x)|}_{\leq Lx} \underbrace{n |\dot{\theta}(nx)|}_{\leq \text{cost.}} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} |u(x)| \cdot Lx \cdot n \cdot \text{cost} dx$$

$\uparrow$
 $\leq \frac{2}{n}$

$$\leq \text{cost} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} |u(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{puntuale dominata}$$

Oss. Quali ipotesi abbiamo usato su u e $\dot{u}$?
Soltanto che stiamo in $L^1((0, M))$ per ogni $M > 0$
(è servita per avere le dominazioni)

Esempio 1 Sempre $u: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo

$$[Eu](x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x > 0 \\ 3u(-x) - 2u(-2x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Claim: si tratta di un 2-extendere, le cui derivate prima e seconda sono quelle che uno si aspetta, ad esempio

$$[Eu]''(x) := \begin{cases} \ddot{u}(x) & \text{se } x > 0 \\ 3\ddot{u}(-x) - 8\ddot{u}(-2x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Brutal mode: perché moralmente funziona? Supponiamo che u sia di classe C^1 fino al bordo. Accade che Eu è di classe C^1 su $\mathbb{R}$? (per essere $W^{2,p}$ non servono derivate seconde continue, ma quelle prime sì, e pure le funzioni!)

Le due espressioni di u (quella per $x > 0$ e $x < 0$) coincidono se $x = 0$ ($u(0) = 3u(0) - 2u(0)$:). Idem per le derivate
 $\dot{u}(x) = -3\dot{u}(-x) + 4\dot{u}(-2x)$ per $x < 0$ e quindi
 $\dot{u}(0) = -3\dot{u}(0) + 4\dot{u}(0)$:)

Passiamo ora alla verifica formale. Devo verificare che

$$\int_{\mathbb{R}} Eu(x) \ddot{\varphi}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} [Eu]'(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

$$\int_{\mathbb{R}} Eu(x) \ddot{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (Eu)''(x) \varphi(x) dx$$

La prima è analoga all'esempio precedente (esercizio da fare!)
Per la seconda riscrivo LHS e RHS.

$$\text{LHS} = \int_{-\infty}^0 (3u(-x) - 2u(-2x)) \ddot{\varphi}(x) dx + \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\varphi}(x) dx$$

Nel primo integrale cambio variabili

$$\int_{-\infty}^0 3u(-x) \ddot{\varphi}(x) dx = \int_0^{+\infty} 3u(y) \ddot{\varphi}(-y) dy$$

$\uparrow$
 $y = -x$

$$\int_{-\infty}^0 -2u(-2x) \ddot{\varphi}(x) dx = \int_0^{+\infty} -u(y) \ddot{\varphi}\left(-\frac{1}{2}y\right) dy$$

$\uparrow$
 $y = -2x$

Riassumendo

$$\text{LHS} = \int_0^{+\infty} u(x) \underbrace{\left\{ \ddot{\varphi}(x) + 3\ddot{\varphi}(-x) - \ddot{\varphi}\left(-\frac{x}{2}\right) \right\}}_{\ddot{\psi}(x)} dx$$

$$\text{RHS} = \int_{-\infty}^0 (3\ddot{u}(-x) - 8\ddot{u}(-2x)) \varphi(x) dx + \int_0^{+\infty} \ddot{u}(x) \varphi(x) dx$$

Come prima

$$\int_{-\infty}^0 3\ddot{u}(-x) \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} 3\ddot{u}(y) \varphi(-y) dy$$

$$\int_{-\infty}^0 -8\ddot{u}(-2x) \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} -4\ddot{u}(y) \varphi\left(-\frac{y}{2}\right) dy, \text{ da cui}$$

$\uparrow$
 $\varphi(x)$

$$\text{RHS} = \int_0^{+\infty} \ddot{u}(x) \underbrace{\left\{ \varphi(x) + 3\varphi(-x) - 4\varphi\left(-\frac{x}{2}\right) \right\}}_{\psi(x)} dx$$

Quello che accade (e che doveva accadere) è che la tesi si è ridotta a

$$\int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}(x) dx = \int_0^{+\infty} \ddot{u}(x) \psi(x) dx$$

Ancora una volta sarebbe banale se $\psi \in C_c^\infty((0, +\infty))$, ma non lo è.

Ci aspettiamo quindi dei termini di bordo che coinvolgano $\psi(0)$ e $\dot{\psi}(0)$. Ma "fortunatamente" deve accadere che si annullano. Infatti $\psi(0) = 0$ e

$$\dot{\psi}(x) = \dot{\varphi}(x) - 3\dot{\varphi}(-x) + 2\dot{\varphi}\left(-\frac{x}{2}\right) \text{ da cui } \dot{\psi}(0) = 0 \text{ e}$$

Rigorosamente si sistema tutto prendendo $\psi_n(x) := \psi(x)\theta(nx)$. I problemi sono al LHS dove troviamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}(x) \theta(nx) dx \rightarrow \int_0^{+\infty} u(x) \ddot{\psi}(x) dx \\ &\quad + 2 \int_0^{+\infty} u(x) \dot{\psi}(x) n \dot{\theta}(nx) dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} u(x) \psi(x) n^2 \ddot{\theta}(nx) dx \end{aligned}$$

Il secondo e terzo termine devono tendere a 0, e lo fanno perché gli integrali sono solo in $[1/n, 2/n]$ e inoltre

$$|\dot{\psi}(x)| \leq Lx \quad \uparrow \\ \text{Lip} + \dot{\psi}(0) = 0$$

$$\text{e} \quad |\psi(x)| \leq Mx^2 \quad \uparrow \\ \text{Taylor Lagrange con} \\ \psi(0) = \dot{\psi}(0) = 0$$

$$\psi(x) = \psi(0) + \dot{\psi}(0)x + \frac{1}{2} \underbrace{\ddot{\psi}(c)}_{\text{limitata}} x^2$$

Quindi passando al limite abbiamo la tesi!

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 46

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 Determinare a e b in modo che

$$[Eu](x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x > 0 \\ a u(-5x) + b u(-2020x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sia un 2-estender

Brutal mode: le funzioni C^1 fino al bordo devono estendersi bene

$$\underbrace{u(0)}_{\text{sopra}} = \underbrace{a u(0) + b u(0)}_{\text{sotto}}$$

$$a + b = 1$$

Inoltre $(Eu)'(x) = -5a u(-5x) - 2020b u(-2020x)$ per $x < 0$
da cui

$$u'(0) = -5a u'(0) - 2020b u'(0) \quad -5a - 2020b = 1$$

Abbiamo ottenuto un sistema lineare che ha soluz. (a, b) unica, e questi dovrebbero essere i valori buoni

Altri valori non vanno bene

Il conto sopra rappresenta una cond. necessaria (l'estesa deve avere derivate prime e seconde cont.)

Questi valori vanno bene

va fatto con i cambi di variabile come nell'ultimo esempio della les. prec. (deve venire $\psi(0) = \psi'(0) = 0$)

Oss. Se la definizione per $x < 0$ fosse stata $a u(-x) + b u(-2x)$, il sistema veniva

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a - 2b = 1 \end{cases} \rightsquigarrow b = -2 \text{ e } a = 3 \quad (\text{come nell'esempio precedente :})$$

Esempio 2 Come sopra con

$$[Eu](x) = a u(|x|) + b u(4|x| + cx) \quad x < 0.$$

Vogliamo che sia un 2- extender.

Intanto deve coincidere per $x > 0$

$$a u(x) + b u(4x + cx) = u(x) \quad \text{per ogni } u$$

da cui $c = -3$ e $a + b = 1$. A questo punto

$$[Eu](x) = a u(-x) + b u(-7x) \quad \forall x < 0$$

e si procede come nell'esempio precedente

Esempio 3 Cerchiamo un 3- extender con

$$u(x) = a u(-x) + b u(-2x) + c u(-3x) \quad \text{per } x < 0$$

Le condizioni necessarie sono il riaccollamento di $u(0)$, $u'(0)$ e $u''(0)$.

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a - 2b - 3c = 1 \\ a + 4b + 9c = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{soluzione unica} \\ \text{(sistemi alla VANDERMONDE)} \end{array}$$

Questa è la cond. necessaria.

Per la sufficiente, serve il solito cambio di variabili (farlo ancora una volta per esercizio, e per tutte e 3 le derivate!).

Esempio 4 Costruzione di extender classici.

$$(a) \quad (0, 1) \rightsquigarrow (-1, 1) \quad 1\text{-extender} \quad [Eu](x) = u(|x|)$$

$$(b) \quad (0, 1) \rightsquigarrow \mathbb{R} \quad 1\text{-extender}$$

Procediamo a tappe

Step 1 $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$ per riflessione $[E_1 u](x) = u(|x|)$

Step 2 $(-1,1) \rightsquigarrow (-1,3)$ per riflessione in $x=1$

$$[E_2 u](x) = u(2-x) \text{ se } x \in (1,3)$$

$\uparrow$
 x e $2-x$ sono simmetrici
 rispetto a 1 (la loro
 media è 1)

Step 3 Grazie agli step 1 e 2 abbiamo esteso u ad una
 funzione in $(-1,3)$. Nota che $(0,1) \subset (-1,3)$.
 Ora scegliamo θ come in figura.

Le cose essenziali sono

- $\theta \in C_c^\infty((-1,3))$
- $\theta(x) = 1$ per ogni $x \in (0,1)$.



Allora basta moltiplicare per θ l'estensione che avevamo
 al termine dello step 2. Osserviamo che

$$u \in W^{1,p}((0,1)) \Rightarrow E_2 u \in W^{1,p}((-1,3)) \Rightarrow E_3 u = E_2 u \cdot \theta \in W^{1,p}(\mathbb{R})$$

$\uparrow$ solita riflessione $\uparrow$ smooth-Sobolev = Sobolev

Alternativa: potevamo direttamente estendere u a $(-1,2)$
 ponendo

$$[E_2 u](x) = \begin{cases} u(-x) & \text{se } x \in (-1,0) \\ u(x) & \text{se } x \in (0,1) \\ u(2-x) & \text{se } x \in (1,2) \end{cases}$$

A questo punto si può moltiplicare per θ come prima.

(c) $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$ 3 estender.

devono stare in $(0,1)$

Lo cerchiamo del tipo $[Eu](x) = a u(-\frac{x}{2}) + b u(-\frac{x}{3}) + c u(-\frac{x}{7})$
 per $x \in (-1,0)$

Come negli esempi precedenti troviamo a, b, c .

Oss. La cosa importante è aver fatto comb. lineari di $u(-\alpha x)$, $u(-\beta x)$, $u(-\gamma x)$ con α, β, γ in $(0, 1)$

$$(d) \quad (-1, 0) \cup (0, 1) \rightsquigarrow (-2, 0) \cup (0, 2) \quad 2\text{-extender}$$

Basta fare separatamente dei 2-extender $(-1, 0) \rightsquigarrow (-2, 0)$
 $(0, 1) \rightsquigarrow (0, 2)$

Questi si fanno semplicemente come nel caso $(0, 1) \rightsquigarrow (-1, 1)$ semplicemente "traslando le costruzioni".



Oss. Non è possibile fare 1-extender $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightsquigarrow \mathbb{R}$
 $\rightsquigarrow (-2, 2)$

perché non posso estendere una $u(x)$ che vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$.

$$(e) \quad (-2, -1) \cup (1, 2) \rightsquigarrow (-2, 2) \rightsquigarrow \mathbb{R}$$



Step 1 Con i soliti procedimenti estendo $(-2, -1) \rightsquigarrow (-2, 0)$
 $(1, 2) \rightsquigarrow (0, 2)$

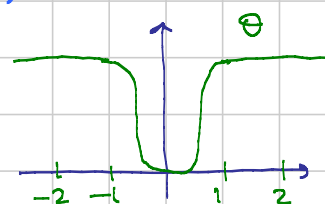
Così non abbiamo finito, perché l'estesa funziona bene in

$$(-2, 0) \cup (0, 2)$$

ma da qui non si estende a $(-2, 2)$!!! (Pensare al caso di $u(x) = -1$ in $(-2, -1)$ e $u(x) = 1$ in $(1, 2)$).



Step 2 Pensiamo θ come in figura. Le proprietà essenziali sono



$$(i) \theta \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$(ii) \theta(x) = 1 \text{ se } |x| \geq 1$$

$$(iii) \theta(x) = 0 \text{ in un intorno di } x=0$$

$$\text{Possiamo ora } [Eu](x) = [E, u](x) \cdot \theta(x)$$

↑ extender a fine step 1

Grazie a (ii) sappiamo che $[Eu](x) = u(x)$ per $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$.

Inoltre $[Eu](x)$ si annulla in un intorno di $x=0$ per (iii)

ed è un extensor in $(-2, 0) \cup (0, 2)$, ma allora lo è in $(-2, 2)$

(tutte le integrazioni per parti che coinvolgono u con una φ che ha supporto compatto in $(-2, 2)$ in realtà avvengono solo su un insieme ben contenuto in $(-2, 0) \cup (0, 2)$)

$$\int_{-2}^2 [Eu](x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_{-2}^2 [Eu]'(x) \varphi(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 [E, u](x) \theta(x) \dot{\varphi}(x) dx &= - \int_{-2}^2 [E, u](x) \dot{\theta}(x) \varphi(x) dx \\ &\quad - \int_{-2}^2 [E, u]'(x) \theta(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza diventa

$$\int_{-2}^2 [E, u] \underbrace{\{\theta \dot{\varphi} + \dot{\theta} \varphi\}}_{\psi} dx = - \int_{-2}^2 [E, u]' \underbrace{\theta \varphi}_{\psi} dx$$

e gli integrali sono in realtà sul supporto di ψ , che è ben contenuto in $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Variante consigliata : come sopra, ma $(-3, -1) \cup (1, 3) \rightsquigarrow (-3, 3)$

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 47

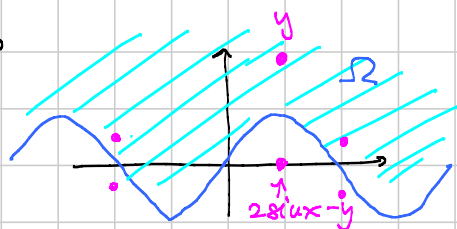
Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio (Extender in $\mathbb{R}^2$) Consideriamo

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \sin x\}$$



Trovare un $\pm$ -extender $\Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$. Un naturale candidato è

$$[Eu](x, y) = u(x, |y - \sin x| + \sin x) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y > \sin x \\ u(x, 2\sin x - y) & \text{se } y < \sin x \end{cases}$$

Per dimostrare che si tratta di $\pm$ ext. devo fare due verifiche

simmetrico di y wrt a $\sin x$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} Eu(x, y) \varphi_x(x, y) dx dy = - \iint_{\mathbb{R}^2} (Eu)_x(x, y) \varphi(x, y) dx dy$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} Eu(x, y) \varphi_y(x, y) dx dy = - \iint_{\mathbb{R}^2} [Eu]_y(x, y) \varphi_y(x, y) dx dy$$

Iniziamo dalla seconda, cercando di ridurre LHS e RHS a Ω .

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \iint_{\Omega} \dots + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} dy u(x, 2\sin x - y) \varphi_y(x, y) \\ &= \iint_{\Omega} \dots + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\sin x}^{+\infty} dz u(x, z) \varphi_y(2\sin x - z) \\ &= \iint_{\Omega} u(x, y) \underbrace{\{ \varphi_y(x, y) + \varphi_y(2\sin x - y) \}}_{\varphi_y(x, y)} dx dy \end{aligned}$$

Ora

$$[Eu]_y(x, y) = \begin{cases} u_y(x, y) & y > \sin x \\ -u_y(x, 2\sin x - y) & y < \sin x \end{cases}$$

$$\text{RHS} = \iint_{\Omega} u_y \varphi dx dy + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} -u_y(x, \sin x - y) \varphi(x, y) dy$$

$$= \iint_{\Omega} u_y(x, y) \underbrace{\{\varphi(x, y) - \varphi(x, \sin x)\}}_{\psi(x, y)} dx dy$$

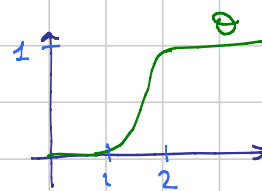
Quindi la tesi equivale a $\iint_{\Omega} u \psi_y = - \iint_{\Omega} u_y \psi$

Sarebbe ovvio se $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, ma non lo è. Tuttavia $\psi(x, y) = 0$ se $(x, y) \in \partial\Omega$, cioè se $y = \sin x$ (verifica) e questo dovrebbe salvarci.

Formalmente, usiamo la solita Θ , e poniamo

$$\psi_n(x, y) := \psi(x, y) \cdot \Theta(n(y - \sin x))$$

↑
misura quanto
(x, y) è dentro Ω (distanza
verticale da $\partial\Omega$)



Ad n fissato vale $\iint_{\Omega} u \psi_{ny} = - \iint_{\Omega} u_y \psi_n$

Ora RHS $\rightarrow - \iint_{\Omega} u_y \psi$ per puntuale dominata. Al RHS abbiamo 2 termini

solito uotwo

$$\iint_{\Omega} u(x, y) \psi_y(x, y) \Theta(n(y - \sin x)) dx dy \xrightarrow{\text{solito uotwo}} \iint_{\Omega} u \psi_y$$

Vorremmo che l'altro termine andasse a 0:

$$\iint_{\Omega} |u(x, y)| \cdot \underbrace{|\psi(x, y)|}_{\leq L \cdot \frac{2}{n}} \cdot \underbrace{|\Theta'(n(y - \sin x))|}_{\text{limitato}} dx dy \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{puntuale} \\ \text{dominata}}} 0$$

in realtà sto integrando su

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \sin x + \frac{1}{n} \leq y \leq \sin x + \frac{2}{n}\}$$

$$|\psi(x, y)| = |\psi(x, y) - \psi(x, \sin x)| \leq L |y - \sin x| \leq L \cdot \frac{2}{n}$$

↑
 $(x, \sin x) \in \partial\Omega$ ψ è lip

↑
nell'insieme
in cui si integra

La derivata rispetto a x è più delicata. Ci aspettiamo

$$[Eu]_x(x, y) := \begin{cases} u_x(x, y) & \text{se } y > \sin x \\ u_x(x, 2\sin x - y) + u_y(x, 2\sin x - y) \cdot 2\cos x & \text{se } y < \sin x \end{cases}$$

$$\text{LHS} = \iint_{\Omega} u \varphi_x + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} u(x, 2\sin x - y) \varphi_x(x, y) dy$$

$$= \iint_{\Omega} u(x, y) \{ \varphi_x(x, y) + \varphi_x(x, 2\sin x - y) \} dx dy$$

$$\begin{aligned} -\text{RHS} &= \iint_{\Omega} u_x \varphi + \iint_{\mathbb{R}-\infty}^{\sin x} u_x(x, 2\sin x - y) \varphi(x, y) dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} dx \int_{-\infty}^{\sin x} u_y(x, 2\sin x - y) \cdot 2\cos x \varphi(x, y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Omega} u_x(x, y) \{ \varphi(x, y) + \varphi(x, 2\sin x - y) \} dx dy \\ &\quad + \iint_{\Omega} u_y(x, y) 2\cos x \varphi(x, 2\sin x - y) dx dy \end{aligned}$$

Parentesi Dalla definizione di derivate deboli, segue una specie di formula di Gauss-Green del tipo

$$\iint_{\Omega} u \underbrace{(Ax + By)}_{\text{div } \vec{E}} dx dy = - \iint_{\Omega} (u_x A + u_y B) dx dy = \langle \nabla u, \vec{E} \rangle \quad \vec{E} := (A, B)$$

per ogni $A \in C_c^\infty(\Omega)$ e $B \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ponendo $A := \varphi(x, y) + \varphi(x, 2\sin x - y)$

$B := 2\cos x \cdot \varphi(x, 2\sin x - y)$

se potessimo usare la formula si sopra verrebbe

$$-\text{RHS} = \iint_{\Omega} u_x A + u_y B = \iint_{\Omega} u (Ax + By) = \text{LHS}$$

perché $A_x + B_y = \varphi_x(x, y) + \varphi_x(x, 2\sin x - y) + \varphi_y(x, 2\sin x - y) - 2\cos x - 2\cos x \varphi_y(x, 2\sin x - y)$

Tutto sta a dimostrare che posso usare GG anche se A e B non sono $C_c^\infty(\Omega)$.

Parentesi brutal Tenendo conto del bordo, GG diventa

$$\iint_{\Omega} u (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} u \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} (u_x A + u_y B) dx dy$$

$\uparrow$
normale esterna

quindi abbiamo speranza che la formula che ci serve sia vera se $\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0$ su $\partial\Omega$.

Ora $\partial\Omega = \{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\}$, quindi il tangente è $(1, \cos x)$ e ruotando di 90° in senso orario (guardando la figura!) ottengo $\vec{n} = (\cos x, -1)$. Ora

$$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = A \cdot \cos x - B = \{\varphi(x, y) + \varphi(x, 2\sin x - y)\} \cdot \cos x - 2\cos x \varphi(x, 2\sin x - y)$$

Mettendo $y = \sin x$ viene $= 0$, che è un buon segno!!

Per rendere il discorso rigoroso, sostituiamo A e B con

$$A_n := A(x, y) \cdot \Theta(n(y - \sin x))$$

$$B_n := B(x, y) \cdot \Theta(n(y - \sin x))$$

Ad n fisso vale GG

$$\iint_{\Omega} u (A_n x + B_n y) dx dy = - \iint_{\Omega} (u_x A_n + u_y B_n) dx dy$$

Al RHS abbiamo convergenza puntuale dominata a quello che vogliamo. Al LHS abbiamo 2 tipi di termini:

$$\iint_{\Omega} u (A_x + B_y) \Theta(n(y - \sin x)) dx dy \rightarrow \iint_{\Omega} u (A_x + B_y) dx dy$$

e poi ci sono i termini in cui ho derivato Θ , e precisamente

$$\iint_{\Omega} u(x,y) \{ A(x,y) \nabla \Theta(m(y - s(x))) (-\cos x) + B(x,y) \nabla \Theta(\dots) \} dx dy$$

$$= \iint_{\Omega} u(x,y) \{ \underbrace{-A(x,y) \cos x + B(x,y)}_{D(x,y) \leq L |y - s(x)| \leq L \frac{2}{n} \text{ dove si integra}} \nabla \Theta(m(y - s(x))) \} dx dy$$

in realtà è
molto meno,
come sempre

Il punto fondamentale è che $D(x,y)$ si annulla su $\partial\Omega$ ed è Lipschitz, quindi al solito

$$|D(x,y)| = |D(x,y) - D(x, s(x))| \leq L |y - s(x)|$$

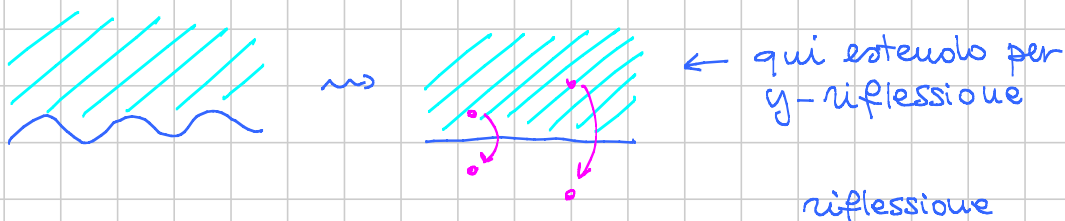
Quindi alla fine i termini con Θ tendono a 0.

Per avere davvero un ϵ -extender, resta da verificare che

$$\|Eu\|_{1,p,\mathbb{R}^2} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

Questo si dimostra facendo esplicitamente i conti, ma il punto essenziale è che $s(x)$ è Lipschitziana, quindi anche nel termine peggiore, $[Eu]_x$, ho moltiplicato per cose limitate.

Qual è l'idea di questa costruzione?



Alla fine torno indietro $\Omega \rightsquigarrow \{y > 0\} \rightsquigarrow \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $(x,y) \rightarrow (x, y - s(x))$ $\uparrow$ $\uparrow$
 ritorno indietro con l'inverso di

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 48

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

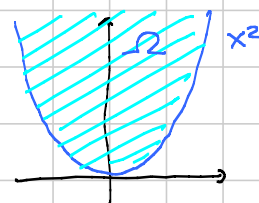
06/10/2020

Esempio $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

Verrebbe da definire

$$[Eu](x, y) := \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y > x^2 \\ u(x, 2x^2 - y) & \text{se } y < x^2 \end{cases}$$

↑
simmetrico di y wrt x^2



Questa Eu estende u , ma NON rispetta il vincolo sulle norme

$$\|Eu\|_{1,p,\mathbb{R}^2} \leq C(p) \|u\|_{1,p,\Omega}$$

Il problema nasce dalle derivate rispetto ad x . Chi sarebbero?

$$[Eu]_x(x, y) = u_x(x, 2x^2 - y) + u_y(x, 2x^2 - y) \cdot 4x \quad \text{se } y < x^2$$

NON LIMITATO

Qui non è difficile trovare esempi che violino la disuguaglianza.

Basta prendere $\varphi \in C_c^\infty((-1, 1)^2)$ e poi porre

$$u_n(x, y) = \varphi(x - n, y - n^4) = \text{stessa funzione centrata nel punto } (n, n^4)$$

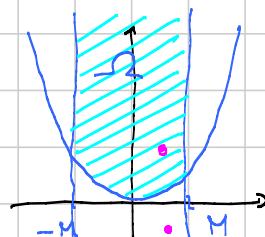
Allora $[Eu_n]_y(x, y)$ è molto grande nella parte negativa per colpa del termine $4x$ che è dell'ordine di n , quindi $\|[Eu_n]_x\|$ è dell'ordine di n , mentre $\|u_n\|_{1,p,\Omega}$ è costantemente uguale a $\|\varphi\|_{1,p,\mathbb{R}^2}$.

Domanda: esiste un φ -extender da Ω in $\mathbb{R}^2$ con controllo delle norme?

Risposta: Sì! Ma la costruzione non è ovvia

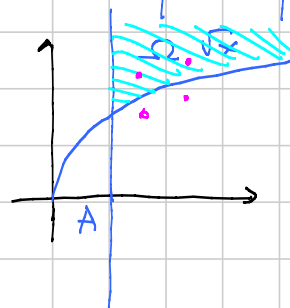
Fatto 1 Fissato $M > 0$ reale, esiste un ε -estensore da
 $\Omega_M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < M, y > x^2 \}$ alla striscia
 $S_M := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < M \}$

Funziona la formula di prima perché x^2
 è Lip. per $x \in (-M, M)$.



Fatto 2 Fissato $A > 0$ reale, esiste un ε -estensore
 da

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A, y > \sqrt{x} \} \text{ a } \\ \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A \}$$



Anche in questo caso funziona la
 riflessione, poiché $\sqrt{x}$ è Lip. per $x > A$.

Oss. La costruzione funziona anche nella direzione opposta,
 cioè da $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A, y < \sqrt{x} \}$ a $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > A \}$.

Fatto 3 L'insieme Ω originario lo posso
 ricoprire con 3 aperti $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ del
 tipo appena descritto, ad esempio

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2, y > x^2 \} \\ \Omega_2 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1, -1 < x < \sqrt{y} \} \\ \Omega_3 &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1, -\sqrt{y} < x < 1 \} \end{aligned}$$



Da ciascuno di questi tre insiemi sappiamo estendere a tutto $\mathbb{R}^2$,
 usando costruzioni precedenti

Fatto 4 Ogni funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si scrive come $u_1 + u_2 + u_3$ con $u_i \in W^{1,p}(\Omega_i)$.

Per far questo basta trovare una partizione dell'unità, cioè 3 funzioni ψ_1, ψ_2, ψ_3 con $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ e

$$\psi_1(x) + \psi_2(x) + \psi_3(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$$

[La dimostrazione è quella del tipo B.]

- Poniamo $\hat{\Omega}_1 = \{|x| < 2\}$, $\hat{\Omega}_2 = \{x > -1, y > 1\}$, $\hat{\Omega}_3 = \{x < 1, y > -1\}$
- Risparmiando: $\hat{\hat{\Omega}}_1 = \{|x| < 1, 3\}$, $\hat{\hat{\Omega}}_2 = \{x > -0, 3, y > 0, 3\}$, $\hat{\hat{\Omega}}_3 = \dots$
- Cerchiamo θ_i a supp. cpt. in $\hat{\Omega}_i$ e identicamente 1 in $\hat{\hat{\Omega}}_i$
- Poniamo

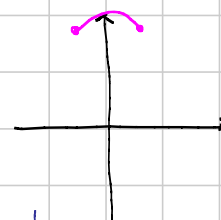
$$\begin{aligned} \psi_1 &= \theta_1 \\ \psi_2 &= \theta_2(1 - \theta_1) \\ \psi_3 &= \theta_3(1 - \theta_1)(1 - \theta_2) \end{aligned} \quad]$$

Infine poniamo $u_i = u \cdot \psi_i$.

Estendo le u_i e poi sommo le estese.

Esempio 2 Estensione dai quadranti

(a) 1-extendere da $(0, +\infty)^2$ a $\mathbb{R}^2$



- Per riflessione wrt asse y estendo al 2° quadrante
- " " " x estendo al 3° e 4° quadrante

Non è difficile intuire che

$$[Eu](x, y) = u(|x|, |y|)$$

Posso anche fare cose più creative, usando 1-extendere diversi da $(0, +\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$. Una possibilità potrebbe essere

$$[Eu](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & x > 0, y > 0 \\ u(-2x, y) & x < 0, y > 0 \\ u(x, -3y) & x > 0, y < 0 \\ u(-2x, -3y) & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} u(x, y) \\ u(-2x, y) \\ u(x, -3y) \\ u(-2x, -3y) \end{cases}} \right\} \text{provare per credere!}$$

(b) 2- extender da $(0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- Estendo al 2° quadrante in uno dei modi che funzionavano da $(0, +\infty)$ ad $\mathbb{R}$, ad esempio

$$[E_1 u](x, y) = 3u(-x, y) - 2u(-2x, y) \quad \text{se } x < 0, y > 0$$

- Estendo al 3° e 4° quadrante allo stesso modo, o anche in un modo diverso.

$$[Eu](x, y) = 3E_1(x, -y) - 2E_1(x, -2y) \quad \text{se } y < 0$$

Esempio 3 $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|\}$

(a) Voglio trovare 1- extender da Ω ad $\mathbb{R}^2$.

Dovrebbe funzionare la solita formula

$$[Eu](x, y) := \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y > |x| \\ u(x, 2|x| - y) & \text{se } y \leq |x| \end{cases}$$

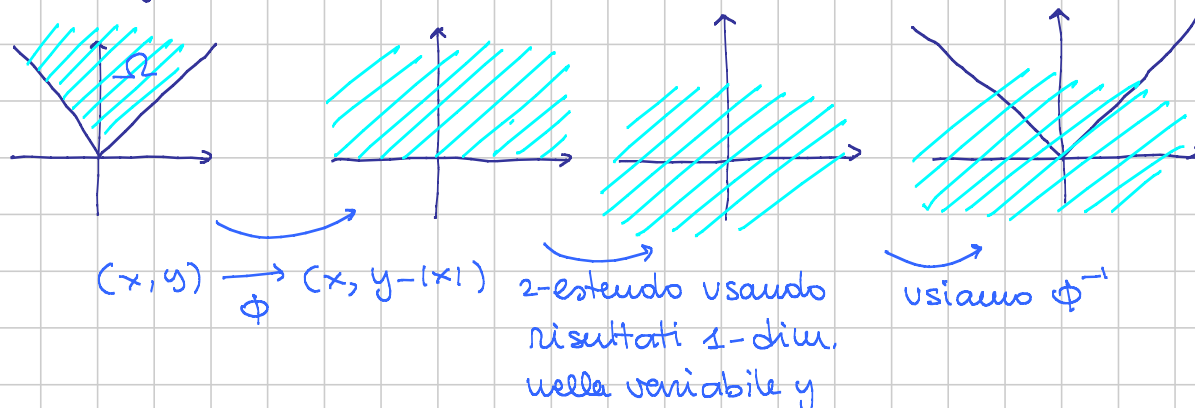
Funziona perché $|x|$ è Lipschitziana.

Questo non è un 2- extender, sostanzialmente per lo stesso motivo per cui $[Eu](x) = u(|x|)$ non lo era da $(0, +\infty)$ ad $\mathbb{R}$ (se prendo $u(x, y) \in C^1$ fino al bordo, la sua estesa ha la derivata u_y che non è continua nei punti del bordo: basta pensare a $u(x, y) = y$, opportunamente modificata fuori da una palla gigante per renderla $W^{1,p}(\Omega)$).

(b) Come posso costruire un 2- extender da Ω in $\mathbb{R}^2$.

Se provo ad usare formule simili a quelle di 1 variabile, mi ritrovo dei valori assoluti $|x|$ ovunque, e questi compromettono le derivate seconde wrt x (provaci e accorgersene).

Quindi la strategia basata sulla riduzione al semipiano non funziona

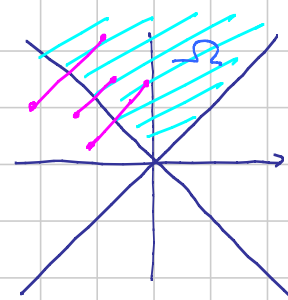


Il problema è che ϕ è "quasi C^1 ", ma per nulla C^2

Come ne usciamo! Ruotando la testa di 45° !!!

Basta osservare che il nuovo Ω è come fosse il 1° quadrante !!

- Estendo prima a $y > x$ (come avremmo fatto in una variabile)
- Estendo a tutto $\mathbb{R}^2$



Visione alternativa:

- ruoto Ω fino ad ottenere il 1° quadrante
- 2-estendo come negli esempi precedenti
- ruoto indietro.

— ○ — ○ —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 49

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

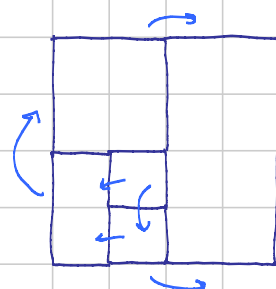
EXTENDER PER INSIEMI DEL PIANO

Ingredienti base: extender in una variabile $(0,1) \rightsquigarrow (-1,1)$ e $(0,+\infty) \rightsquigarrow \mathbb{R}$ che si fanno (ad esempio) per riflessione.

Esempio 1 Quadrato $(0,1)^2$.

Soluzione à la Brezis, facendo varie riflessioni.

Attraverso 4 simmetrie abbiamo esteso a $(-1,3)^2$, che è un quadrato t.c. $(0,1)^2 \subset (-1,3)^2$.



A questo punto consideriamo $\varphi \in C_c^\infty((-1,3)^2)$ con $\varphi \equiv 1$ in $(0,1)^2$. Moltiplicando per questa φ abbiamo finito

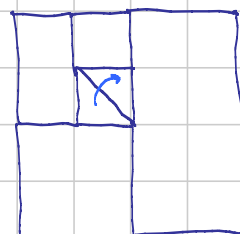
$$u \in W^{1,p}((0,1)^2) \Rightarrow \underbrace{Eu}_{\text{quello costruito con le riflessioni}} \in W^{1,p}((-1,3)^2) \Rightarrow \varphi \cdot Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$$

↑
quello costruito con le riflessioni

↑
è scelto sia nel $\square$ grande sia fuori da $\text{supp } \varphi$.

Esempio 2 Triangolo qualunque

Se il triangolo è isoscele e rettangolo, allora con una simmetria rispetto all'ipotenusa diventa un quadrato, e poi punto come nell'esempio prec.



Se il triangolo è qualunque, con una AFFINITÀ lo mandiamo in un triangolo isoscele rettangolo, poi estendiamo, poi tornia.

uno indietro con l'affinità inversa.

Oss. generale La solus. per i quadrati vale anche per i rettangoli. Più in generale, se Ω_1 e Ω_2 vengono mandati l'uno nell'altro da una affinità, allora ogni solus. per Ω_2 diventa una solus. per Ω_1 , e viceversa.

Ancora più in generale, basta che esista $\Phi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ invertibile, di classe C^1 , con J_Φ e $J_{\Phi^{-1}}$ limitati (notare che sono le hp. della formula di cambio di variabili negli integrali multipli).

Esempio 3 Tre quadranti

Questo insieme, a meno di rotazioni, è come se fosse

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < |x|\}$$

↑ funzione Lip.

Da questo insieme posso estendere per riflessione

$$[Eu](x, y) = \begin{cases} u(x, y) & \text{se } y < |x| \\ u(x, 2|x| - y) & \text{se } y > |x| \end{cases}$$

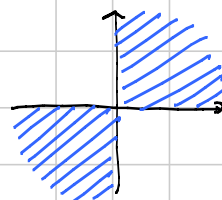
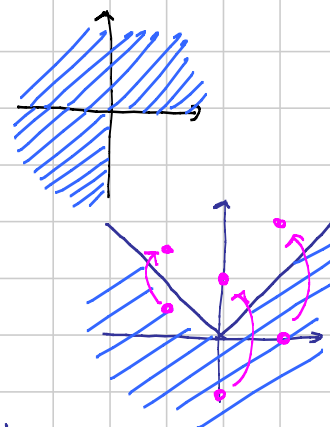
La verifica dovrebbe essere il solito conto.

Esempio 4 1° e 3° quadrante

Come dimostro che un estender NON esiste?

SE un estender esistesse, allora varrebbero i teoremi di immersione. Quindi basta mostrare che i teo. di immersione NON valgono.

In questo caso, vorrebbe dire che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > 2$

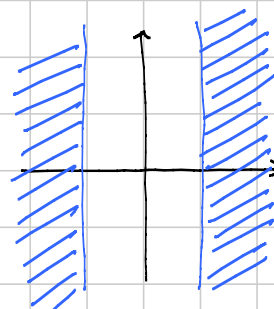


si estendono con continuità alla chiusura, il che è falso per la u che vale 1 nel 1° quadr. e -1 nel 3° quadr.

Oss. Questo mostra non esistono $(1,p)$ estender per $p > 2$.
Per $p \leq 2$ occorrerebbe qualche argomento più fine.

Esempio 5 Due semipiani: $x < -1$ unito $x > 1$

L'estender esiste $(1,p)$ -estender per ogni p e si costruisce a tappe



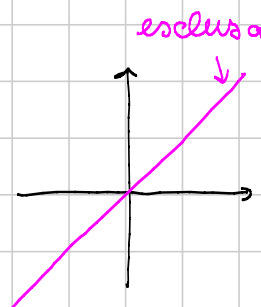
- Estendo da $x < -1$ a $x < 0$ per riflessione
- " " $x > 1$ a $x > 0$ per riflessione
- Considero una θ come in figura
 $\rightarrow$ classe C^∞
 $\rightarrow \theta(x) \equiv 1$ per $|x| \geq 1$
 $\rightarrow \theta(x) \equiv 0$ in un intorno di $x=0$
- Moltiplico la u estesa precedentemente per questa θ , dipendente dalla sola x .



Oss. A termine dei primi due passi avevo esteso a $x < 0$ unito $x > 0$, ma nessuno mi assicurava che andasse bene su $\mathbb{R}^2$.

Esempio 6 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x\}$

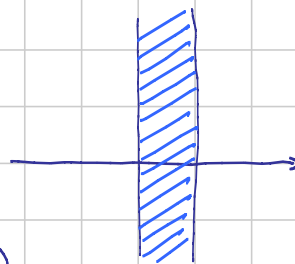
Certamente non esiste $(1,p)$ estender per $p > 2$ per lo stesso motivo dell'esempio 4.



Lo stesso esempio (1 sopra e -1 sotto) non sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ per nessun $p \geq 1$ (esercizio) e quindi non esiste estender nemmeno per $p \leq 2$.

Esempio 7 Striscia $(0,1) \times \mathbb{R}$

- Per riflessione estendiamo a $(-1,2)$
- Moltiplichiamo per cutoff $\theta(x)$
con $\theta \in C_c^\infty((-1,2))$ e $\theta(x) \equiv 1$ in $(0,1)$.

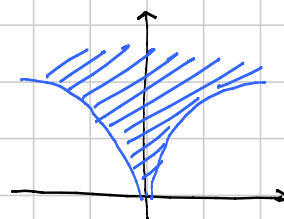
Esempio 8 $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |\sin x|\}$ $\uparrow$ Lipschitz

$$[Eu](x,y) := \begin{cases} u(x,y) & \text{se } y > |\sin x| \\ u(x, 2|\sin x| - y) & \text{se } y < |\sin x| \end{cases}$$

Solite verifiche!

Esempio 9 $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|^{1/2}\}$

Se dimostriamo che in Ω non valgono le immersioni, allora non esiste un $(1,p)$ estender per ogni $p \geq 1$.



Consideriamo $u(x,y) = \frac{1}{y^\alpha}$. Per quali α questa funzione sta in $W^{1,p}(\Omega)$, almeno "vicino all'origine"?

$$\iint_{\Omega \cap B(0,1)} \frac{1}{y^\alpha} dx dy < +\infty$$

$$(u \in L^p)$$

$$\alpha p < 1 \rightsquigarrow \alpha < \frac{1}{p}$$

$$\iint_{\Omega \cap B(0,1)} \frac{1}{y^{(\alpha-1)p}} dx dy < +\infty$$

$$(u_y \in L^p)$$

$$(\alpha-1)p < 1 \rightsquigarrow \alpha < \frac{1}{p} + 1$$

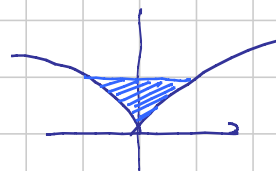
Posso prendere $p=3$ e $\alpha = \frac{1}{4}$. Allora $u \in W^{1,3}(\Omega)$ ma $u \notin L^\infty(\Omega)$, e quindi le immersioni non valgono.

Burocraticamente l'esempio non andrebbe bene perché abbiamo integrato solo in un intorno dell'origine.

In realtà basta considerare $u(x, y) = \frac{1}{y^\alpha} \cdot \varphi(x, y)$
dove $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\varphi \equiv 1$ in un
intorno dell'origine. Quindi tutti gli integrali si riducono
ad un intorno dell'origine.

In realtà le condizioni sono ancora più larghe.

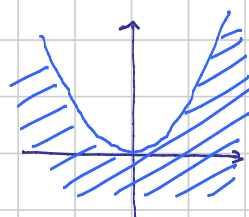
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \cap (-1,1)^2} \frac{1}{y^\alpha} dx dy &= 2 \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx \frac{1}{y^\alpha} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{y^{\alpha-2}} dy \end{aligned}$$



e questo converge $\Leftrightarrow \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{p}$

Quindi per ogni $p \geq 1$ esistono funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e che
non sono limitate.

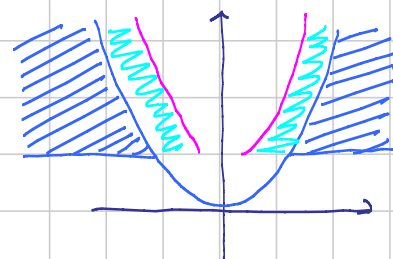
Esempio 10 $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$



La banale riflessione non funziona perché
 x^2 non è lip. (quindi l'extender per riflessione
si comporta male rispetto alle norme).

Però si possono fare 3 costruzioni separate

- una nella zona con $x \in (-1, 1)$
- due nella zona $y > \frac{1}{2} \quad x < 0$
 $y > \frac{1}{2} \quad x > 0$
- le tre costruzioni si rendono globali
con una partizione dell'unità



Per esercizio sistemare bene i
dettagli.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 50

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $\Omega = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$

$$F(u) := \int_{\Omega} \{ |\nabla u|^2 + \cos u \} dx dy$$

$$\min \{ F(u) : u \in H^1(\Omega), u \equiv 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

Oss. La condizione $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$ ha senso in $H^1(\Omega)$ perché la traccia è ben definita. Equivalentemente possiamo scrivere

$$\min \{ F(u) : u \in H_0^1(\Omega) \}.$$

La formulazione debole è già scritta.

Compattezza Supponendo $F(u_n) \leq M$ deduciamo che

$$\begin{aligned} M \geq F(u_n) &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + \underbrace{\cos u_n}_{\geq -1}) dx dy \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx dy - \text{meas}(\Omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq M'$$

Da qui non si arriva ad una stima $\|u_n\|_{L^\infty}$ come in una variabile.

Tuttavia possiamo concludere che $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$

grazie a Poincaré (e qui si usa che $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$)

A questo sappiamo che $\|u_n\|_{1,2,\Omega} \leq M''$
 $\uparrow$ full norm in $H^1(\Omega)$

A questo punto per Rellich - Kondrachov esiste s.succ.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ forte}$$

(anzi in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < 2^* = +\infty$)

e estraendo ulteriormente

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{puntuale dominato.}$$

Brutalmente: Poincaré + RK hanno sostituito bound $L^\infty + AA$.

SCI Per sci della norma

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^2 dx dy \geq \int_{\Omega} |\nabla u_\infty|^2 dx dy$$

e inoltre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \cos(u_{n_k}) dx dy = \int_{\Omega} \cos(u_\infty) dx dy$$

$\uparrow$
puntuale q.o. e dominata da 1

e quindi $\liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_{n_k}) \geq F(u_\infty).$

Regolarità Qui di sotto è una pena

Ricaviamo ELE Sia u p.to di min. Consideriamo

$$\varphi(t) := F(u + tv) \quad \text{con } v \text{ "opportuna"}$$

Allora

$$\varphi'(0) = \int_{\Omega} \{ 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \sin u \cdot v \} dx dy = 0$$

$\uparrow$
basta osser. che si può derivare sotto segno di integrale

Questo ci dice che

$$-\int_{\Omega} 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx dy = -\int_{\Omega} \sin u \cdot v$$

Per quali v vale questa formula?

- Di sicuro per tutte le $v \in C_c^\infty(\Omega)$
- con un facile argomento di approx. si estende a tutte le $v \in H_0^1(\Omega)$ (si tratta della definizione stessa di $H_0^1(\Omega)$)

Quella scritta sopra è la formulazione debole dell'eq. semilineare

$$\Delta u = -\sin u$$

Nota bene: se potessi integrare per parti e usare il fatto nullo sarebbero gli stessi passaggi che si fanno in una variabile.

Guadagno iniziale di regolarità Essendo $\partial\Omega$ regolare, allora

$$\Delta u = f \text{ con } f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$$

Nel nostro caso banalmente $f(x,y) = -\sin u(x,y) \in L^2(\Omega)$ e quindi $u \in H^2(\Omega)$. Ora che $u \in H^2$, per immersione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $p < +\infty$, e quindi u è Hölderiana di ogni ordine, e quindi u si annulla al bordo in senso classico (e non solo come traccia).

Guadagno ulteriore di regolarità Essendo $\partial\Omega$ molto regolare, allora

$$f \in H^k \Rightarrow u \in H^{k+2}$$

Quindi il bootstrap funziona se siamo in grado di garantire che

$$u \in H^k \stackrel{??}{\Rightarrow} f = -\sin u \in H^k$$

L'implicazione però è DELICATA, e tende ad essere vera SOLO IN DIMENSIONE BASSA.

Dov'è il cuglippo?

Esaminiamo il passo iniziale. Se $u \in H^2$, possiamo dire che $\sin u \in H^2$?

- Ovviamente $\sin u \in L^2$

- Derivate prime

$$f_x = \cos u \cdot u_x$$

$$f_y = \sin u \cdot u_y$$

$$\int_{\Omega} |f_x|^2 \leq \int_{\Omega} |u_x|^2 < +\infty$$

idem ☺

- Derivate seconde

$$f_{xx} = -\sin u \cdot u_x^2 + \cos u \cdot u_{xx} \quad (\text{le altre sono simili})$$

Ora banalmente

$$\int_{\Omega} (\cos u)^2 \cdot u_{xx}^2 \leq \int_{\Omega} u_{xx}^2 < +\infty$$

Il problema nasce da $\sin u \cdot u_x^2$. Questo sta in L^2 se (non oso dire "e solo se") $u_x^2 \in L^2$, cioè $u_x \in L^4$, e questo in generale non è garantito da $u \in H^2$.

Questo funziona quando H^2 si immerge in $W^{1,4}$, cioè (scendendo di un livello), quando H^1 si immerge in L^4 , cioè $4 \leq 2^* = \frac{2d}{d-2}$, il che è vero se e solo se $d \leq 4$.

Essendo in dimensione 2 le cose vanno bene, dunque $\sin u \in H^2$ e quindi $u \in H^4$.

Da qui tu poi si prosegue per induzione.

Vediamo il passaggio successivo : $u \in H^4 \Rightarrow$ sia $u \in H^4$.

È fastidioso perché richiede le formule per le derivate successive

$$f_{xxx} = -\cos u \cdot u_x^3 - 3\sin u \cdot u_x u_{xx} + \cos u \cdot u_{xxx}$$

$\uparrow$ limitata $\uparrow$ limitata $\uparrow L^2$ $\uparrow L^2$

Si tratta di mostrare che, quando calcolo le derivate k -esime di f , vengono fuori solo

- derivate k -esime di u (ok perché sono L^2 per hp)
- derivate $(k-1)$ -esime di u al più al quadrato (ok perché sono L^4 in dimensione $d \leq 4$)
- derivate di ordine inferiore come gli pare (ok perché tanto sono continue).

Alternativa? Supponiamo $u \in H^4$. Allora

$$f_x = \cos u \cdot u_x$$

$$f_{xx} = -\sin u \cdot u_x^2 + \cos u \cdot u_{xx}$$

$\cap C^2$ $\cap H^2$ $\cap C^2$ $\cap H^2$

Tutto sta a verificare che $u_x^2 \in H^2$ se $u \in H^4$, e più in generale $u_x^2 \in H^k$ se $u \in H^{k+2}$

Poniamo $g = u_x^2$. Allora

$$g_x = 2 u_x u_{xx}$$

$\uparrow$ continue, quindi L^∞

$$g_{xx} = 2 u_{xx}^2 + 2 u_x u_{xxx}$$

$\uparrow$ continua $\uparrow$ continua $\uparrow L^2$

Le derivate quante sono "nascoste" dal conto $C^2 \cdot H^2 = H^2$, che va controllato a parte (vale in tutte le dimensioni?).

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 51

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio 1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ una palla (ma si può fare in insiemi più generali).

Discutere la seguente implicazione

$$u \in H^k(\Omega) \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^k(\Omega)$$

Caso $k=0$, cioè $u \in L^2 \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in L^2$

Falso già in dimensione 1.
Ad esempio

$$u = \frac{1}{|x|^{1/3}} \in L^2((-1,1)) \quad \text{ma} \quad u^2 = \frac{1}{|x|^{2/3}} \notin L^2((-1,1))$$

Stesso discorso per $\frac{1}{|x|^\alpha}$ con $\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}$

Esempi analoghi valgono in ogni dimensione.

Caso $k=1$, cioè $u \in H^1 \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^1$

In dimensione $d=1$ è vero, perché ci sono due cose da controllare

- $u^2 \in L^2$, il che è vero perché u è continua
- $(u^2)' = 2u u' \in L^2$, il che è vero perché è cont. $\cdot L^2$, cioè limitata $\cdot L^2$ che è ancora L^2 .

In dimensione $d=2$ è falso. Posto $v = u^2$ dobbiamo verificare

- $v \in L^2$, cioè $u \in L^4$, il che è vero per immersione
- v_x e v_y sono in L^2 , cioè $u u_x \in L^2$ e $u u_y \in L^2$

$\uparrow \uparrow$ sta in L^2

sta in L^q ma non per $q=+\infty$

C'è speranza di costruire un esempio quando $u \in H^1 \setminus L^\infty$.

In una lezione prec. abbiamo fatto esempi del tipo $|\log |x||^\alpha$

$$\begin{aligned}
 u = \frac{|\log|x||^\alpha}{f''(r)} \in H^1 &\Leftrightarrow \int_0^R |f'(r)|^2 r \, dr < +\infty \\
 &\Leftrightarrow \int_0^R \frac{|\log r|^{2\alpha-2}}{r^2} r \, dr < +\infty \\
 &= \int_0^R \frac{1}{r |\log r|^{2-2\alpha}} \, dr \\
 &\Leftrightarrow 2-2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Quindi $u \in H^1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$ e $v = u^2 \in H^1 \Leftrightarrow 2\alpha < \frac{1}{2}$.

Quindi se prendo $\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ (ad esempio $\alpha = \frac{1}{8}$) ho un controesempio.

Oss. Ogni controesempio in dim 2 implica un controesempio in dim $d \geq 2$ (basta considerare funzioni che dipendono solo dalle prime 2 variabili).

Caso $k=2$, cioè $u \in H^2 \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^2$

In dimensione 1, non dovrebbero esserci problemi.

- $u^2 \in L^2$ (continua)
- $2u u' \in L^2$ (continua)
- $2u'^2 + 2u u'' \in L^2$ (continua² + continua · L^2)

In dimensione 2, va bene ugualmente

- $u^2 \in L^2$ ($u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,q}$ per ogni q finito $\Rightarrow u$ cont. e anzi u Hölderiana di ogni esponente)
- u_x e u_y in L^2 , cioè $2u u_x \in L^2$ e $2u u_y \in L^2$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ \text{continua} & & L^2 \end{matrix}$
- u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} in L^2 . Ad esempio $2u_x^2 + 2u u_{xx}$

$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ u_x \in L^4 & & \text{cont.} & & L^2 \end{matrix}$

per immersione

Stessa cosa con u_{yy} e anche per la derivata mista

$$u_{xy} = 2 \underset{\substack{\uparrow \\ L^4}}{u_y} u_x + 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cont.}}}{u} \underset{\substack{\uparrow \\ L^2}}{u_{xy}}$$

(ricordiamo che $L^4 \cdot L^4 = L^2$)

Oss. La stessa dimostrazione funziona fino alla dim. $d=4$ perché il punto essenziale è l'immersione di H^1 in L^4 , che vale fino a $d=4$. **FALSA**, abbiamo usato anche che u è continua

Per $d \geq 5$ è probabile che sia falso, e per trovare i controesempi occorre cercare di violare l'immersione $H^1 \rightarrow L^4$.

Consideriamo funzioni radiali $u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ $\varphi(r) = \frac{1}{r^\alpha}$
Abbiamo visto in lezioni precedenti che

$$u \in H^2 \Leftrightarrow \int_0^R |\varphi''(r)|^2 r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{1}{r^{2(\alpha+2)}} r^{d-1} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+4 \quad -d+1 < 1 \Leftrightarrow 2\alpha < d-4$$

$$u^2 \in H^2 \Leftrightarrow 4\alpha < d-4$$

Abbiamo che $u \in H^2$ e $u^2 \notin H^2$ se $2\alpha < d-4$ e $4\alpha \geq d-4$
 $4\alpha < 2d-8$

Mettendo insieme deve essere $d-4 \leq 4\alpha < 2d-8$. Un tale α esiste se e solo se $d > 4$. Quindi in dimensione $d \geq 4$ abbiamo il controesempio.

Oss. L'implicazione $u \in H^2 \Rightarrow u$ continua, o anche solo $u \in L^\infty$ vale solo in dimensione $d \leq 3$

$d=2$: $u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,q} \forall q$ finito $\Rightarrow u$ è continua

$$d=3: u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,6} \quad \left(2^* = \frac{p^d}{d-p} = \frac{6}{3-2}\right) \Rightarrow u \text{ è continua} \\ \text{(anzi } \frac{1}{2}\text{-Hölder)}$$

$$d=4: u \in H^2 \Rightarrow u \in W^{1,4} \Rightarrow u \in L^q \text{ per ogni } q < +\infty \\ \text{(ma in generale } u \notin L^\infty)$$

Si riesce a fare un controesempio $u \in H^2$, ma $u^2 \notin H^2$ anche per $d=4$?

Slogan: usa i logaritmi !!

Proviamo con $u(x) = |\log|x||^\alpha$ $\varphi(r) = |\log r|^\alpha$
Allora

$$\varphi'(r) = -\alpha |\log r|^{d-1} \frac{1}{r}$$

$$\varphi''(r) = +\alpha(\alpha-1) |\log r|^{d-2} \frac{1}{r^2} + \alpha |\log r|^{d-1} \frac{1}{r^2}$$

termine più pericoloso

$$\text{Quindi } u \in H^2 \Leftrightarrow \int_0^R |\log r|^{2d-2} \frac{1}{r^4} - r^3 \overset{d-1}{\downarrow} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^R \frac{1}{r} \frac{1}{|\log r|^{2-2d}} dr < +\infty$$

$$\Leftrightarrow 2-2d > 1 \Leftrightarrow d < \frac{1}{2}$$

Analogamente $u^2 \in H^2 \Leftrightarrow 2d < \frac{1}{2}$, cioè $d < \frac{1}{4}$.

Prendendo $\alpha = \frac{1}{3}$ abbiamo controesempio anche in dimensione 4.

Caso $k > 2$, cioè $u \in H^k \stackrel{?}{\Rightarrow} u^2 \in H^k$

In dimensione $d=1$, dovrebbe essere tranquillo.

• $u \in L^2$ (banale perché è continua)

• $\dot{u} = 2u \dot{u} \in H^{k-1}$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $H^{k-1} \quad H^{k-1}$

e il prodotto resta H^{k-1}

In dimensione $d=2$, dovrebbe essere tranquillo

- $u \in L^2$ (vero per continuità)
- u_x e u_y in L^2 . Ora $u_x = 2u u_x$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\text{cont} \quad L^2$
- u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} in H^{k-2} . Basta controllarne una.

$$u_{xx} = 2u_x^2 + 2u u_{xx} \in H^{k-2}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $C^{k-2} \quad H^{k-2} \quad \text{☺}$

su questo usiamo l'ipotesi induttiva, nel
senso che $u_x \in H^{k-1} \Rightarrow u_x^2 \in H^{k-1}$

In dimensione $d=3$, funziona allo stesso modo, perché
abbiamo l'ipotesi induttiva (grazie al fatto che è stato
dimostrato per $k=2$) e il fatto che $u \in H^k \Rightarrow u \in C^{k-2}$.

Dalla dimensione $d=4$ in poi, le cose si complicano
velocemente.

Oss. Allo stesso modo si trattano le implicazioni

$$u \in H^k \Rightarrow \sin u \in H^k$$

$\uparrow$
 u

con l'unica eccezione che $u_x = \cos u \cdot u_x$

$$u_{xx} = -\sin u \cdot u_x^2 + \cos u \cdot u_{xx}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\text{limitato gratis} \quad \text{limitato} \quad L^2$

quindi basta l'immersione $H^1 \rightarrow L^4$, che vale da $d=4$
compresa in poi.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 52

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$

$$F(u) = \iint_{\Omega} \{ u_x^2 + u_y^2 + u^6 - \sin x \cdot u \} dx dy$$

Stabilire se $\inf \{ F(u) : u \in C^\infty(\Omega) \} \in \mathbb{R}$

↑ senza BC

Possiamo sperare che esista

$$\begin{aligned} \min \{ F(u) : u \in H^1(\Omega) \} \\ \in W^{1,4}(\Omega) \\ \in W^{1,3}(\Omega) \end{aligned}$$

Formulazione debole: ok con ognuna delle scelte degli spazi.

In $W^{1,4}(\Omega)$ i valori sono reali, altrimenti occorre ammettere $+\infty$ (l'importante è non avere pezzi che potenzialmente fanno $+\infty$ e altri che fanno $-\infty$).

Compattezza Sia $\{u_m\} \subseteq H^1(\Omega)$ t.c. $F(u_m) \leq M$. Osserviamo che

$$M \geq F(u_m) \geq \iint_{\Omega} \{ u_{m,x}^2 + u_{m,y}^2 + u_m^6 - |u_m| - 1 \} dx dy$$

Abbiamo usato che $p^4 \geq p^2 - 1$

↑ occhio al valore assoluto

$$\geq \iint_{\Omega} \{ u_{m,x}^2 + u_{m,y}^2 + \frac{1}{2} u_m^6 - A \} dx dy$$

per una opportuna costante A (abbiamo usato $s^6 - |s| - 1 \geq \frac{1}{2}s^6 - A$)

Quindi $F(u_m) \leq M$ implica

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq M^1 \quad \text{e} \quad \|u_m\|_{L^6(\Omega)} \leq M^1$$

Dalla seconda stima integrale deduciamo $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq M_3$
e quindi

$$\|u_m\|_{1,2,\Omega} \leq M_4 \quad (\text{controllo della norma in } H^1)$$

Per compattezza debole delle palle, a meno di s. succ. non rinom.

$$u_{mx} \rightharpoonup v_{\infty} \\ \text{debole } L^2$$

$$u_{my} \rightharpoonup w_{\infty} \\ \text{debole } L^2$$

e per immersione compatta $u_m \rightarrow u_{\infty}$ in L^2 forte
(e anzi in tutti L^q con $q < +\infty$).

Per le solite compatibilità $v_{\infty} = u_{\infty x}$ e $w_{\infty} = u_{\infty y}$, quindi possiamo scrivere

$$u_m \rightarrow u_{\infty} \\ \text{forte}$$

$$\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u_{\infty} \text{ debole } L^2$$

$$\boxed{\text{SCI}} \quad \liminf \iint_{\Omega} u_{mx}^2 dx dy \geq \iint_{\Omega} u_{\infty x}^2 dx dy$$

$\uparrow$
 sci della norma

$$\liminf \iint_{\Omega} u_{my}^4 dx dy \geq \iint_{\Omega} u_{\infty y}^4 dx dy$$

$\uparrow$
 funzione convessa + convergenza
 debole

Parenesi: in realtà abbiamo pure che $u_{my} \rightharpoonup u_{\infty y}$
debole in $L^4(\Omega)$. Quindi potremmo usare sci della norma

Fatto generale: succ. limitata in $L^4(\Omega)$ + debolmente conv.
in $L^1(\Omega)$ (o comunque in qualunque $L^p(\Omega)$
con $p \in [1, 4)$) implica conv. debole in L^4 .

Fatto generale: per una succ. limitata in qualche L^q , la
conv. debole basta testarla su un denso.

Per la parte di funzione abbiamo almeno due strategie

- ① Osservare che $u_n^6 - \sin x \leq -A$ dove A non dipende da n o da x (solito stima $S^6 - \sin x \leq S^6 - |S| \geq -A$)
A questo punto si può usare Fatou grazie al fatto che possiamo assumere che
$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$
- ② Usare che $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^6 e anche in L^4 , e usare la continuità della norma.

Nel caso ① si ottiene SCI, nel caso ② pure continuità.

Conclusione Il minimo esiste in $H^1(\Omega)$, quindi $\inf \in \mathbb{R}$ in ogni classe + piccola (e coincide con $\inf$ se la classe è densa, come nel nostro caso).

REGOLARITÀ BIG PROBLEM per colpa del termine $u y^4$.
Ricaviamo almeno ELE.

$$\varphi(t) := F(u + tv)$$

con u p.to di min. e v opportuna (ad esempio H^1 , ma occhio ad evitare dei $+\infty$).

Dopo aver verificato che si può derivare sotto il segno di integrale (FARLO!) otteniamo

$$\varphi'(0) = \iint_{\Omega} \{2u_x v_x + 4u y^3 v_y + 6u^6 v - \sin x v\} dx dy = 0$$

Limitandosi alle sole $v \in C_c^\infty(\Omega)$ troviamo

$$-\iint_{\Omega} \{2u_x v_x + 4u y^3 v_y\} dx dy = \iint_{\Omega} \{6u^6 - \sin x\} dx dy$$

e questa è la formulazione debole dell'equazione

$$\operatorname{div}(2u_x, 4u y^3) = 6u^6 - \sin x,$$

e cioè

$$2u_{xx} + 12u_y^2 u_{yy} = 6u^6 - \sin x$$

(è come se brutalmente avessimo integrato per parti)

Usando in fase 2 delle $v \in C^2(\bar{\Omega})$ che non sono nulle al bordo troviamo le NBC che nascono "on the road", nel vostro caso

$$\begin{aligned} u_x &= 0 & \text{sui lati verticali} \\ u_y &= 0 & \text{sui lati orizzontali} \end{aligned}$$



Potendo integrare la prima per parti, verrebbe

$$-\iint_{\Omega} \langle \nabla v, \vec{E} \rangle dx dy = \iint_{\Omega} v \cdot \operatorname{div} \vec{E} dx dy + \int_{\partial\Omega} v \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

con $\vec{E} = (2u_x, 4u_y^3)$, da cui una specie di FLCV su $\partial\Omega$ implica che

$$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Le NBC date "on the road" si possono riassumere come

$$\langle \nabla u, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{cioè} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0} \quad \text{su } \partial\Omega$$

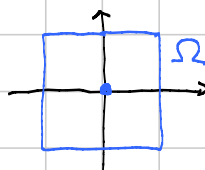
↑ derivata nella direzione NORMALE al bordo

Oss. La vera sfida sarebbe capire se u_{xx} e u_{yy} esistono in qualche senso classico. — o —

Esempio 2 $\inf \left\{ \iint_{\Omega} \{ |u_x|^p + |u_y|^p + u^6 \} dx dy : u \in C^\infty(\Omega) \right\}$

$$u(0,0) = 7$$

dove $\Omega := (-1, 1)^2$.



CLAIM

- Per $p > 2$, $\mathcal{Q}$ ' inf è > 0
- per $p \in [1, 2]$, $\text{inf} = 0$.

Primo tentativo Riscaldamento. Data $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ consideriamo $u_n(x) := \varphi(nx)$, con $x \in \mathbb{R}^2$ (notazione vettoriale)
 $\uparrow$ stiamo "restringendo" φ

$u_{nx}(x) = n\varphi_x(nx)$ e $u_{ny}(x) = n\varphi_y(nx)$. Quindi

$$F(u_n) = \iint_{\Omega} \{ n^p |\varphi_x(nx)|^p + n^p |\varphi_y(nx)|^p + \varphi(nx)^6 \} dx$$

$$\stackrel{y=nx}{=} \frac{1}{n^2} \iint_{\Omega} \{ n^p |\varphi_x(y)|^p + n^p |\varphi_y(y)|^p + \varphi(y)^6 \} dy$$

$\uparrow$ siamo in 2 variabili

Questo mostra che per $p \in [1, 2]$ $\swarrow$ per ora escluso si ha che $F(u_n) \rightarrow 0$, quindi $\text{inf} = 0$

Secondo tentativo Esistenza del min in $W^{1,p}(\Omega)$.

osservazione CHIAVE: se $p > 2$ la condizione puntuale $u(0,0) = 7$ ha senso in $W^{1,p}(\Omega)$, perché in tal caso si tratta di funzioni continue.

Metodo diretto classico $\Rightarrow$ il minimo esiste e NON può essere nullo (nessuna funz. continua con $u(0,0) = 7$ può avere integrale di u^6 nullo). Quindi $\text{inf} > 0$ se $p > 2$.

Caso critico Per $p=2$ il pbm. di minimo in $H^1 = W^{1,2}$ non ha senso, perché le funzioni in H^1 non hanno necessariamente valori puntuali. Usando funzioni del tipo

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} 7(1-|x|^\alpha) & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

si dovrebbe veder che $F(u_\alpha) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ $\nearrow$ caso in es. prec.
 $\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 53

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 Sia V sp. normato con $\dim(V) < +\infty$.

Sia $f: V \rightarrow V$ continuo (non nec. limitato)

Allora f è compatto.

Dim: Occorre dimostrare che $\forall \{v_n\} \subseteq V$ limitata si ha che $f(v_n)$ ammette s. succ. convergente.

Oppure: per ogni $A \subseteq V$ limitato si ha che $\overline{f(A)}$ è compatto in V .

A limitato $\Rightarrow \exists R > 0$ t.c. $A \subseteq \overline{B}(0, R)$

$\uparrow$ compatto

$\Rightarrow f(A) \subseteq f(\overline{B}(0, R))$

$\uparrow$ compatto perché f è continua

$\Rightarrow \overline{f(A)}$ è chiuso in compatto, e quindi compatto.

Punto fondamentale: se $\dim(V) < +\infty$, allora le palle chiuse sono compatte (è vero per la norma euclidea, e tutte le norme sono equivalenti in dim. finita)

(altro fatto equivalente: se $\dim(V) < +\infty$, allora la convergenza in norma è equivalente alla convergenza delle componenti)

Esempio 2 Sia H spazio di Hilbert, e sia $f: H \rightarrow H$.

(a) Compatto $\nRightarrow$ continuo (qualunque operatore con immagine finita, ad esempio due punti, è cpt., ma non nec. cont.)

(b) Continuo $\nRightarrow$ compatto, ovviamente se $\dim(H) = +\infty$

(Basta considerare l'identità che manda $B(0, 1)$ in sé)

(c) Simmetrico $\Rightarrow$ Lineare

↑

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall (v, w) \in H^2$$

Semplice esercizio di "spostamento": dati v_1 e v_2 si ha

$$\begin{aligned} \langle f(v_1 + v_2), w \rangle &= \langle v_1 + v_2, f(w) \rangle \\ &= \langle v_1, f(w) \rangle + \langle v_2, f(w) \rangle \\ &= \langle f(v_1), w \rangle + \langle f(v_2), w \rangle \\ &= \langle f(v_1) + f(v_2), w \rangle \end{aligned}$$

Dal momento che vale per ogni $w \in H$, si deduce che
 $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

Oss. In tutto l'esercizio, abbiamo usato solo che c'è un prodotto scalare, non la completezza.

Esempio 3 (Operatori di moltiplicazione)

Sia H spazio di Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$.

Sia $\{\lambda_n\}$ una succ. di numeri reali.

Consideriamo l'applicazione lineare $A: H \rightarrow H$ tale che

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) A è ben definita se e solo se $\{\lambda_n\}$ è limitata

Supponiamo $\{\lambda_n\}$ sia limitata, diciamo $|\lambda_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia $v \in H$. Lo possiamo scrivere come

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \|v\|^2 < +\infty$$

↑
 $\langle v, e_n \rangle$

Vorremmo tanto porre

$$Av := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n$$

e possiamo farlo se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 < +\infty$$

Ma così è poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 \leq L^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$

Viceversa, supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 < +\infty$ tutte le volte che $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$. Allora $\{\lambda_n\}$ è limitata. Questo segue da un classico esercizio di Analisi 1.

Analisi 1 Sia $\alpha_n \rightarrow +\infty$ una succ. di numeri reali.

Allora esiste $\{x_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty \quad \text{ma} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = +\infty$$

Dall'esercizio segue la tesi con $x_n = v_n^2$ e $\alpha_n = \lambda_n^2$

Oss. Ci siamo in realtà chiesti quando esisteva una applicazione lineare e continua tale che $Ae_n = \lambda_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Se non si richiede la continuità, allora ovviamente esiste (e non è nemmeno unica) una A assegnata su un insieme linearmente indipendente (come un po' di assioma di scelta per estendere l'insieme lin. indep. ad una base ALGEBRICA, e poi è geometria 1).

(b) Dimostrare che A è simmetrico quando è ben definito.

Quasi ovvio. Sente che $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$

$$f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n$$

$$f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_n e_n$$

Per la rappresentazione del prod. scalare in termini di compou. LHS e RHS sono uguali a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n w_n \quad (\text{per motivi diversi})$$

(c) A è continuo S-S se e solo se è ben definito.

Continuità strong-strong $\Leftrightarrow$ limitatezza (questa storia vale SOLO per mappe LINEARI)

Ora

$$\|Av\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 \leq L^2 \|v\|^2$$

(d) A è compatto se e solo se $\lambda_n \rightarrow 0$

Assumiamo a priori che $\{\lambda_n\}$ è limitata, altrimenti A non è nemmeno ben definito.

Compatto $\Rightarrow \lambda_n \rightarrow 0$

Per assurdo. Supponiamo che λ_n non tenda a 0. Allora esistono $m > 0$ ed una s.succ. λ_{n_k} t.c.

$$|\lambda_{n_k}| \geq m > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dico che $\{e_{n_k}\}$ è limitata (ovvio) e $Ae_{n_k} = \lambda_{n_k} e_{n_k}$ non ha s.succ. di Cauchy, e quindi non ha s.succ. convergenti. Infatti per $i \neq j$ si ha che

$$\begin{aligned} \|Ae_{n_i} - Ae_{n_j}\|^2 &= \|\lambda_{n_i} e_{n_i} - \lambda_{n_j} e_{n_j}\|^2 \\ &= \lambda_{n_i}^2 + \lambda_{n_j}^2 \geq 2m^2 > 0 \end{aligned}$$

e quindi non può diventare $< \varepsilon$ piccolo a piacere per i, j grandi

Alternativa diretta Consideriamo la successione $\{e_n\}$ che è limitata.

Allora le immagini $\{\lambda_n e_n\}$ devono avere s.succ. che converge forte. Questa succ. è limitata e converge debolmente a 0 (sulle succ. limit. la conv. debole è equivalente alla conv. delle componenti).

Quindi l'unico limite forte possibile per una s.succ. è 0. Quindi deve esistere

$$\lambda_{n_k} e_{n_k} \rightarrow 0 \quad \text{forte}$$

cioè

$$\begin{aligned} \|\lambda_{n_k} e_{n_k}\| &\rightarrow 0 \\ &\parallel \\ |\lambda_{n_k}| \end{aligned}$$

Cosa abbiamo dimostrato? Che $\{\lambda_n\}$ ammette una s.succ. che tende a 0. Questo NON BASTA.

Per concludere, serve il Lemma della SOTTO-SOTTO.

→ Allo stesso modo si dimostra che ogni s.succ. di $\{\lambda_n\}$ ammette una sotto-sotto-succ. che tende a 0.

→ Questo basta per concludere che TUTTA tende a 0.

Per l'altra implicazione vedi lezione successiva

(e) A è continuo w-s se e solo se è compatto.

Dalla teoria generale compatto + simmetrico $\Rightarrow$ continuo w.s.

$$\boxed{\text{Continuo w-s} \Rightarrow \lambda_n \rightarrow 0} \xrightarrow{\text{dopo}} \text{compatto}$$

Consideriamo $e_n \rightarrow 0$. Deve essere $Ae_n \rightarrow 0$ forte

cioè $\lambda_n e_n \rightarrow 0$ forte, cioè

$$|\lambda_n| \rightarrow 0, \text{ cioè } \lambda_n \rightarrow 0.$$

$$\text{---} 0 \text{ ---} 0 \text{ ---}$$

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 54

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Avanzo lezione precedente H sp. di Hilbert con base ortonorm. $\{e_n\}$

Operatore $A: H \rightarrow H$ lineare e continuo con

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\lambda_n \rightarrow 0$, allora A è compatto.

↑ ogni tanto punto da 1 per comodità

Ipotesi : $\{u_m\} \subseteq H$ succ. limitata qualunque

Tesi : esiste s.succ. che converge FORTEMENTE

Notazioni : introduciamo le componenti

$$u_m = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\langle u_m, e_i \rangle}_{i\text{-esima componente di } u_i} e_i$$

Osserviamo che $|\langle u_m, e_i \rangle| \leq \|u_m\| \leq M$

↑ equilimitazione

quindi la successione di numeri $\{\langle u_m, e_i \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ è limitata $\forall i \geq 1$

Step 1 Individuazione della s.succ. e candidato limite.

Con un procedimento diagonale troviamo $n_k \rightarrow +\infty$ tale che

$$\langle \lambda_{n_k} u_{n_k}, e_i \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} d_i \quad \forall i \geq 1$$

[Troviamo s.succ. tale che $\langle u_{n_k}, e_1 \rangle \rightarrow d_1$, da questa estraiamo in modo che $\langle u_{n_k}, e_2 \rangle \rightarrow d_2$, e così via, poi concludiamo "diagonalizzando"]

Osserviamo che $\{\langle \lambda_m u_m, e_i \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ è limitata per ogni $i \geq 1$ essendo $\{\lambda_m\}$ limitata. Il candidato limite di Au_m è

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i$$

Step 2 Il candidato limite è ben definito, cioè

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < +\infty.$$

Fissato un intero $N \geq 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^N \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \lambda_{n_k} u_{n_k}, e_i \rangle^2 \\ \text{scommio} \rightarrow &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \langle \lambda_{n_k} u_{n_k}, e_i \rangle^2 \\ \text{limite con} & \\ \text{somma} & \\ \text{FINITA} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\lambda_{n_k}^2}_{\leq L^2} \langle u_{n_k}, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L^2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \langle u_{n_k}, e_i \rangle^2 \\ &\leq L^2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_{n_k}, e_i \rangle^2}_{\|u_{n_k}\|^2} \end{aligned}$$

$$\leq L^2 \cdot M^2$$

Qui ad essere
preciso non so
che il limite esiste,
quindi dovrei
scrivere limsup

Poiché il bound non dipende da N , la serie converge $\ddot{\smile}$.

Oss. Da questo momento sappiamo che $Au_{n_k} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$
(e quello che abbiamo fatto è ri-dimostrare
l'esistenza di una s.succ. debolmente convergente. Qui potevamo
usare il risultato generale).

Resta da dimostrare la convergenza FORTE.

Step 3 UNIFORME PICCOLEZZA DELLE CODE

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ t.c. } \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=N}^{+\infty} \lambda_i^2 \langle u_m, e_i \rangle^2 \leq \varepsilon$$

in questo punto è essenziale che $\lambda_m \rightarrow 0$

Sappiamo che $\|u_m\|^2 \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Scegliamo $N \geq 1$ tale che

$$\lambda_i^2 M^2 \leq \varepsilon \quad \forall i \geq N$$

(qui uso che $\lambda_i \rightarrow 0$).

Ora basta osservare che

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{\infty} \lambda_i^2 \langle u_m, e_i \rangle^2 &\leq \frac{\varepsilon}{M^2} \sum_{i=N}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M^2} \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{M^2} \|u_m\|^2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(abbiamo diviso per M , ma non è un grosso problema)

Step 4 Allo stesso modo si dimostra che

$$\sum_{i=N}^{\infty} d_i^2 \leq \varepsilon$$

↑ stesso N di prima

[Basta mescolare Step 2 e Step 3]

Step 5 Mostriamo che $Au_{m_k} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i$ FORTEMENTE, cioè

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Au_{m_k} - \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i\|^2 = 0$$

Ora

$$\|Au_{m_k} - \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_{m_k} \langle u_{m_k}, e_i \rangle - d_i)^2$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, prendiamo N come negli Step 3 e 4 e dividiamo la serie in due pezzi

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{n_k} \langle v_{n_k}, e_i \rangle - \alpha_i)^2 + \sum_{i=N}^{+\infty} (\lambda_{n_k} \langle v_{n_k}, e_i \rangle - \alpha_i)^2$$

Quando $k \rightarrow +\infty$, la prima sommatoria, con un numero FINITO di termini, tende a 0 per definizione di α_i .

La seconda sommatoria si stima con

$$2 \sum_{i=N}^{+\infty} \lambda_{n_k}^2 \langle v_{n_k}, e_i \rangle^2 + 2 \sum_{i=N}^{+\infty} \alpha_i^2 \leq 4\varepsilon$$

abbiamo usato che
 $(A-B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$

Abbiamo dimostrato che, fissato $\varepsilon > 0$, vale che

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|A v_{n_k} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\|^2 \leq 4\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo finito. $\hat{=}$

Altre domande sullo stesso operatore.

① Sotto quali condizioni è iniettivo.

Se e solo se $\lambda_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: facile verifica!

Se c'è un λ_{n_0} nullo, allora NON è iniettivo $A e_{n_0} = 0$.

Se tutti i λ_n sono $\neq 0$, allora $A v$ ha almeno una componente non nulla se v ha almeno una componente non nulla.

② Sotto quali condizioni è suriettivo

Achtung! In dimensione FINITA un'appl. lineare è iniettiva se e solo se è surgettiva. In dimensione infinita QUESTO NON È PIÙ VERO

Risposta: A surgettivo esiste $m > 0$ tale che $|\lambda_n| \geq m > 0$ per ogni $n \geq 1$

Idea: dato $w \in H$ voglio trovare $v \in H$ t.c. $Av = w$.
Scritto w nella forma

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle e_i \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} \langle w, e_i \rangle e_i$$

deve essere $\lambda_i \langle v, e_i \rangle = \langle w, e_i \rangle$, quindi

$$\langle v, e_i \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle w, e_i \rangle$$

Sapendo che $\sum_{i=1}^{\infty} \langle w, e_i \rangle^2 < +\infty$, devo poter dedurre $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle^2$

e questo per il solito esercizio di Analisi 1 è vero solo se $\{\frac{1}{\lambda_i}\}$ è limitata, che è equivalente a λ_i lontani da 0.

Oss. Altro esempio di operatore iniettivo ma non surgettivo è lo shift.
 $(v_1, v_2, v_3, \dots) \rightarrow (0, v_1, v_2, v_3, \dots)$

Due esempi creativi

- $A: H \rightarrow H$ lineare, simmetrico, compatto, infiniti autovalori, Ker di dimensione infinita.

Come sopra con $\lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$

- $A: H \rightarrow H$ lineare, simm., compatto, e $\max \left\{ \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2} : v \in H \setminus \{0\} \right\}$ non esiste (col valore assoluto esiste per forza)

Come sopra con $\lambda_n = -\frac{1}{n}$ (sup = 0, ma max N.E.)
(esiste invece il minimo)

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 55

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Consideriamo $H := L^2(0,1)$ e sia $A: H \rightarrow H$
l'operatore definito per ogni $u \in H$ da

$$[Au](x) = xu(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

(a) A è lineare, simmetrico, lipschitz
↑ banale

Verifichiamo la simmetria rispetto al prod. scalare di L^2

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 xu(x) \cdot v(x) dx = \int_0^1 u(x) \cdot xv(x) dx = \langle u, Av \rangle$$

Essendo l'operatore lineare continuità e lip. sono equiv.
alla limitatezza, cioè $\|Au\| \leq L\|u\|$ per ogni $u \in H$.

In questo caso

$$\|Au\|^2 = \int_0^1 [xu(x)]^2 dx = \int_0^1 x^2 u(x)^2 dx \leq \int_0^1 u(x)^2 dx = \|u\|^2$$

*↑
≤ 1*

quindi è lip. e una possibile costante è 1.

(b) Determinare la costante di Lip. Sia L tale costante.

[Nota bene: il p.to precedente mostra che $L \leq 1$, ma NON
che $L=1$]

Fissiamo $\varepsilon > 0$, e consideriamo $u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (1-\varepsilon, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Si vede che $\|u_\varepsilon\|^2 = \int_0^1 u_\varepsilon(x)^2 dx = \varepsilon$

*↑
tendono a concentrarsi dove
x assume il valore massimo*



Allo stesso modo

$$\|Au_\varepsilon\|^2 = \int_{1-\varepsilon}^1 x^2 dx \geq \varepsilon \overbrace{(1-\varepsilon)^2}^{\substack{\text{stima dal basso per} \\ \text{integrandi}}} \quad \uparrow \quad \substack{\text{misura} \\ \text{conten. di integr.}}$$

Ma allora

$$\varepsilon(1-\varepsilon)^2 = \|Au_\varepsilon\|^2 \leq L^2 \|u_\varepsilon\|^2 = L^2 \varepsilon$$

da cui $L \geq 1-\varepsilon$. Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario segue che $L \geq 1$.

Oss. importante Non esiste $u \neq 0$ tale che $\|Au\|^2 = \|u\|^2$

Dovrebbe essere $\int_0^1 x^2 u(x)^2 dx = \int_0^1 u(x)^2 dx$, cioè

$$\int_0^1 \underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0} \underbrace{u(x)^2}_{\geq 0} dx = 0, \text{ quindi } u(x) \equiv 0$$

(c) Dimostrare che A è iniettivo ma non surgettivo

Iniettivo: $Au=0 \Leftrightarrow x u(x)=0$ q.o. in $(0,1) \Leftrightarrow u=0$ q.o. in $(0,1)$

Surgettivo: dico che non lo è. Occorre trovare $g \in L^2((0,1))$ che non si scrive come Au .

Dovrebbe essere

$$x u(x) = g(x) \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

cioè

$$u(x) = \frac{g(x)}{x} \quad \text{" " " "}$$

Basta fare in modo che

$$\int_0^1 g(x)^2 dx < +\infty \quad \text{ma} \quad \int_0^1 \frac{g(x)^2}{x^2} dx = +\infty$$

Basta prendere $g(x) \equiv 1$.

Oss. In dimensione infinita esistono anche operatori NON
iniettivi, ma surgettivi.

Un esempio è lo shift a sx dimenticando una componente:

$$(v_1, v_2, v_3, \dots) \rightarrow (v_2, v_3, v_4, \dots)$$

(d) Dimostrare che A non ha autovalori

Se fosse $Au = \lambda u$, dovrebbe essere vero che

$$xu(x) = \lambda u(x) \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

cioè

$$(x - \lambda)u(x) = 0 \quad \text{per q.o. } x \in (0,1)$$

ma questo è possibile $\Leftrightarrow u(x) = 0$ per q.o. $x \in (0,1)$, ma
così non vale.

(e) Dimostrare che A NON è compatto

Modo con il cannone: se fosse compatto, essendo simmetrico,
vorrebbe dire che $L^2(0,1)$ ammette una
base di autovettori di A , e invece A
non ha nemmeno un autovalore.

A mano: devo costruire $\{u_n(x)\} \subseteq L^2(0,1)$ limitata tale che
 $\{xu_n(x)\}$ NON ammette s.succ. convergenti forte.

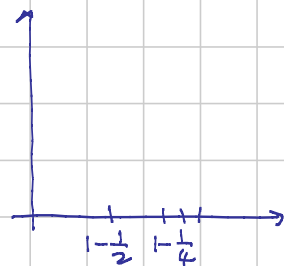
Come dimostro che non esistono s.succ. convergenti? Mostrando
che non esistono s.succ. di Cauchy.

Idea: considerare $\{u_n(x)\}$ di norma unitaria con i
supporti disgiunti e lontani da zero

Consideriamo $x_n := 1 - \frac{1}{2^n}$ per $n = 0, 1, 2, \dots$

Poniamo quindi

$$u_n(x) := \begin{cases} (\frac{1}{2})^{n+1} & \text{per } x \in [x_n, x_{n+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



In questo modo

$$\|u_n\|^2 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{1}{2^n} dx = 2^{n+1} \underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{\frac{1}{2^{n+1}}} = 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

e inoltre

$$\|x u_n(x) - x u_m(x)\|^2 = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x^2 2^{n+1} dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} x^2 2^{m+1} dx$$

se $n \neq m$

i supporti sono disgiunti, quindi per ogni x al più una delle 2 è $\neq 0$.

$$= 2,$$

il che impedisce di avere s.succ. di Cauchy !!

(f) Determinare inf e sup di $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^2}$ in $H \setminus \{0\}$

Come da teoria, posso restringermi alle u di norma 1.

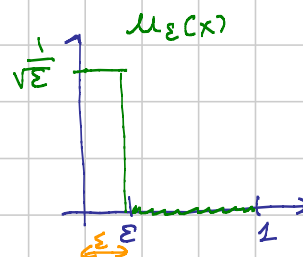
Quindi devo fare inf e sup di

$$\left\{ \int_0^1 x u(x)^2 dx : \int_0^1 u(x)^2 dx = 1 \right\}$$

È evidente che $\inf \geq 0$ e $\sup \leq 1$. Per dimostrare che sono uguali basta utilizzare delle u concentrate solo all'inizio o alla fine dell'intervallo.

Ad esempio, ponendo

$$u_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{se } x \in (0, \varepsilon) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



abbiamo che $\int_0^1 u_\varepsilon(x)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$ e

$$\int_0^1 x u_\varepsilon(x)^2 dx = \int_0^\varepsilon x \cdot \frac{1}{\varepsilon} dx = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

il che mostra che $\inf = 0$.

(g) Sempre nello spirito degli autovalori / autovettori studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, iniettività e surgettività di $A - \lambda \text{Id}$.

Nota bene: in dimensione finita vale

$A - \lambda \text{Id}$ non iniettivo $\Leftrightarrow A - \lambda \text{Id}$ non surg. $\Leftrightarrow \lambda$ autovalore

$$[(A - \lambda \text{Id})u](x) = xu(x) - \lambda u(x) = (x - \lambda)u(x)$$

Questa è sempre iniettiva perché $(x - \lambda)u(x) = 0$ q.o. in $(0, 1)$ se e solo se $u(x) = 0$ q.o. in $(0, 1)$.

La surgettività si riduce alla seguente implicazione

$$\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty \quad ? \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)^2}{(x - \lambda)^2} dx < +\infty$$

e questo è vero se e solo se il denominatore non si annulla mai in $[0, 1]$ (estremi compresi), il che accade $\Leftrightarrow \lambda > 1$ oppure $\lambda < 0$. Quindi

- $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \Rightarrow A - \lambda \text{Id}$ è surgettivo
- $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow A - \lambda \text{Id}$ NON è surgettivo (non riesce a risolvere $(\text{Id} - \lambda A)$)

Oss. (Molto brutale) I $\lambda \in [0, 1]$ soddisfanno almeno una delle condizioni per essere autovalori in dimensione finita, quindi si possono considerare come "autovalori" in senso molto esteso con delle delta di Dirac come "autovettori"

Oss. finale Questo esercizio si estende ad operatori

$$A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

definiti da $[Au](x) = a(x) \cdot u(x) \quad \forall x \in \Omega$

↑
funzione
assegnata

Ad esempio

- (a) A è ben definito e continuo e lipschitziano se e solo se $a \in L^\infty(\Omega)$ e la costante di Lip di A è proprio $\|a\|_{L^\infty(\Omega)}$

Stessa dimostrazione di sopra

- (b) A ammette l'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\text{meas} \{x \in \Omega : u(x) = \lambda\} > 0$$

ed in tal caso il relativo autospatio ha sempre dimensione infinita.

- (c) Chi sono $\inf$ e $\sup$ del quoziente di Rayleigh?
- o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 56

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

L'ESEMPIO (Invertir del Laplaciano)

↑ derivata 2^a in dimensione 1

Dato $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, data $f \in L^2(a,b)$, esiste unica $u \in L^2(a,b)$ t.c.

↑ Hilbert

$$\begin{cases} \ddot{u} = f & \text{in } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 & \text{(DBC)} \end{cases}$$

Definiamo un operatore $A: L^2(a,b) \rightarrow L^2(a,b)$

$$f \rightarrow u$$

Si tratta di un operatore lineare, simmetrico, compatto.

Buona definizione $\forall f \in L^2$ esiste unica $u \in H^2$ che risolve

Si può fare in almeno 3 modi diversi.

↑ poi nel definire A si usa solo che $u \in L^2$

1° - via elementare Poichiamo

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

$$\bar{F}(x) := \int_a^x F(t) dt$$

↑ doppia primitiva

poi cerchiamo costanti A e B tali che $u(x) = \bar{F}(x) + Ax + B$ risolva il problema dato. In questo modo si ottiene esistenza, unicità e regolarità.

2° - Via variazionale

L'osservazione è che u risolve il pbm. dato se e solo se u risolve

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + f u \right) dx : u \in H_0^1(a,b) \right\}$$

↑ DBC

Da qui si conclude con le solite tecniche.

3° - Via Lax-Milgram Scriviamo l'equazione data come

$$\int \ddot{u} \varphi = \int f \varphi \quad \rightsquigarrow \quad \int \ddot{u} \varphi \, dx = - \int f \varphi = L(\varphi)$$

"
 $\langle u, \varphi \rangle =$ prodotto scalare strano in H_0^1

Si dimostra che RHS è un'applicazione lineare e continua rispetto a questo prodotto scalare strano e come tale si rappresenta come prodotto scalare

Linearità e simmetria La linearità è quasi ovvia. La simmetria segue dall'integrazione per parti.

Supponiamo

$$\ddot{u} = f$$

$$Af = u$$

$$\ddot{v} = g$$

$$Ag = v$$

Allora

$$\langle Af, g \rangle = \int_a^b u \ddot{v} \, dx = \int_a^b \ddot{u} v \, dx = \langle f, Ag \rangle$$

int. per parti + DBC

$$\int_a^b u \ddot{v} \, dx = \underbrace{[u \dot{v}]_a^b}_{0 \text{ per DBC su } u} - \int_a^b \dot{u} \dot{v} \, dx = - \underbrace{[\dot{u} v]_a^b}_{0 \text{ per DBC su } v} + \int_a^b \ddot{u} v \, dx$$

Compattezza

SLOGAN: un operatore che rende le cose più regolari ha buone prob. di essere compatto !!

Sia $\{f_n\} \subseteq L^2(a,b)$ una succ. limitata. Vogliamo dim. che $\{u_n\}$ è rel. cpt. in $L^2(a,b)$, ma lo è pure in ambienti più regolari !!

Consideriamo $\{\dot{u}_n\}$. Sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder (le derivate sono proprio le f_n) e sono equilimitate (grazie a Rolle esiste $x_n \in (a,b)$ t.c. $\dot{u}_n(x_n) = 0$).

Ora consideriamo le $\{u_n\}$. Sono equi Lipschitz (poiché $\{\dot{u}_n\}$ sono equilimitate) e sono equilimitate (grazie alle DBC).

Per AA esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif., e quindi pure L^2 .

Oss. La compattezza è molto più forte. Data $\{f_n\} \subseteq L^2(a,b)$ limitata, troviamo $n_k \rightarrow +\infty$ t.c.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty$$

unif. in $[a,b]$

$$\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty$$

unif. in $[a,b]$

$$\ddot{u}_{n_k} \rightarrow \ddot{u}_\infty$$

debole in $L^2(a,b)$

Conseguenza Esiste una base di $L^2(a,b)$ costituita da autovettori dell'operatore precedente, cioè

$$A f_n = \lambda_n f_n \quad (\lambda_n \rightarrow 0)$$

Ponendo $A f_n = \mu_n$, abbiamo

$$\ddot{u}_n = f_n = \frac{1}{\lambda_n} A f_n = \boxed{\frac{1}{\lambda_n}} \mu_n \quad \nearrow -\infty$$

Oss. Le μ_n le possiamo pensare come autovettori della derivata seconda, ma formalmente sono autovettori dell'inverso della derivata seconda con DBC.

Si possono trovare esplicitamente

Esempio con $(a,b) = (0,\pi)$ $\ddot{u} = \lambda u$

$\uparrow$ moralmente è l'inverso

Stabiliamo il segno di λ . Moltiplico per u e integro per parti

$$\int_0^\pi \lambda u^2 dx = \int_0^\pi \ddot{u} u dx = - \int_0^\pi \dot{u}^2 dx$$

Da qui deduciamo $\lambda < 0$. A questo punto

$$u(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda} x) + b \sin(\sqrt{-\lambda} x)$$

Imponendo $u(0) = 0$ troviamo $a = 0$.

Imponendo $u(\pi) = 0$ troviamo che $\lambda = -n^2$ e b è libero, come giustamente uno si aspetta.

Questo dimostra per via involutiva che $\{\sin(nx)\}$ è una base ortogonale (si rende facilmente ortonormale) di $L^2(0,\pi)$.

Oss. Tutti gli elementi della base si annullano al bordo, e questi generano tutto $L^2((0, \pi))$, comprese le funzioni che divergono al bordo o la funzione costante zero.

Non c'è nessuna condizione perché la convergenza è solo L^2 .

Esempio
$$\begin{cases} \ddot{u} = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

(Come prima, ma con NBC)

↑ omogenee, altrimenti niente linearità!

Annuncio: qualche piccolo problema c'è !!

Ragione:
$$0 = u(b) - u(a) = \int_a^b \dot{u}(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Quindi se f NON ha media nulla non c'è speranza di poter risolvere!

Supponiamo anche di aver risolto. Allora se u è soluzione, anche $u + \text{cost}$ è soluzione, quindi niente unicità.

Soluzione: includiamo con H lo spazio delle $f \in L^2((a, b))$ t.c. $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Si verifica che è un Hilbert rispetto alla solita struttura.

A questo punto l'inverte della derivata seconda definisce un operatore $A: H \rightarrow H$ lineare, simmetrico e compatto.

Buona positura Tre metodi come prima.

Via elementare Poniamo $u(x) = \hat{F}(x) + B$ e cerchiamo B in maniera che u abbia media nulla. Le NBC sono automatiche se f ha media nulla.

Via variazionale Cerchiamo di risolvere

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} u'^2 + f u \right) dx : u \in H^1(a,b), \int_a^b u dx = 0 \right\}$$

Aver posto u a media nulla garantisce l'esistenza di un punto in cui u si annulla, il che è fondamentale in fase di compattezza.

Questo vincolo si traduce in un moltiplicatore di Lagrange quando si ricava E-L-E, quindi si ottiene

$$\begin{cases} u'' = f + \lambda \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Integrando la prima equ. in (a,b) si ottiene

$$0 = u(b) - u(a) = \int_a^b u''(x) dx = \underbrace{\int_a^b f(x) dx}_0 + \lambda(b-a)$$

e quindi per forza $\lambda = 0$.

Quindi la sol. del pbm. variazionale risolve il nostro pbm.

Via Lax-Milgram Sesse che $\langle\langle u, \varphi \rangle\rangle := \int_a^b u' \varphi' dx$ sia un prodotto scalare nello spazio

$$\hat{H} := \{ u \in H^1(a,b) : \int_a^b u dx = 0 \}$$

In particolare sesse che sia definito positivo, cioè $\int_a^b u'^2 dx > 0$ se $u \neq 0$. Questo sarebbe falso in $H^1(a,b)$

senza condizioni (pensare a $u = \text{costante}$), ma diventa vero con la media nulla grazie a Wirtinger.

Anche la media nulla di f sesse per ambientare il problema in $\hat{H}$.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 57

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Back to esempio precedente Vogliamo risolvere

$$\begin{cases} u' = f & \text{in } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Data $f \in L^2(a,b)$ a media nulla, trovare $u \in H^1$ a media nulla che soddisfa equ. + NBC.

Via Lax-Milgram Riscriviamo nella forma

$$\int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \dots \text{ da precisare}$$

Poniamo $\hat{H} := \{ u \in H^1(a,b) : \int_a^b u(x) dx = 0 \}$

↑ Hilbert rispetto al solito prodotto scalare

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx \quad \forall (f, g) \in \hat{H}.$$

Si verifica che $\hat{H}$ è Hilbert anche rispetto a $\langle\langle f, g \rangle\rangle$.

→ bilinearità e non-negatività sono ovvie

→ il fatto che sia definito positivo richiede che in $\hat{H}$ valga

$$\int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$$

$$\text{Ora } \int_a^b f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f \text{ costante} \Rightarrow f \equiv 0$$

↑ media nulla

→ Anche verificata la completezza. Supponiamo $\{u_n\}$ di Cauchy, dunque limitata, rispetto alla norma $\int_a^b u_n(x)^2 dx$.

Allora $u_n \rightarrow v_\infty$ in $L^2(a,b)$ (sono di Cauchy)

e a meno di s.succ. $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ uniformemente. Al solito modo si verifica che $u_\infty' = v_\infty$ e u_∞ è l'unica primitiva di v_∞ che ha media nulla.

Per il lemma della sotto-sotto sappiamo ora che $u_n \rightarrow u_\infty$ unif (TUTTA la successione). Dunque $u_\infty \in \hat{H}$ e la convergenza è rispetto alla norma di $\hat{H}$.

Ora poniamo $L: \hat{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(\varphi) := - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quella dell'equazione (anche solo } L^2)}}{f(x)} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \hat{H}$$

Il claim è che L è lineare (ovvio) e continuo wrt alla norma di $\hat{H}$, in quanto

$$|L(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(a,b)} \leq \|f\|_{L^2(a,b)} \cdot \text{cost} \cdot \|\varphi\|_{\hat{H}}$$

Per l'ultima disuguaglianza serve una stima del tipo

$$\int_a^b \varphi(x)^2 dx \leq \text{cost} \int_a^b \dot{\varphi}(x)^2 dx \quad \forall \varphi \in \hat{H}$$

e questa è proprio Wirtinger.

Per il teorema di Riesz (duale di un Hilbert) esiste $u \in \hat{H}$ t.c.

$$L(\varphi) = \int_a^b \ddot{u}(x) \dot{\varphi}(x) dx = \langle\langle u, \varphi \rangle\rangle_{\hat{H}} \quad \forall \varphi \in \hat{H}$$

Claim: questa u è la soluzione del nostro problema.

Dobbiamo dim. che $u \in H^2$, u risolve l'equ., e soddisfa NBC.

Per ipotesi sappiamo che

$$\int_a^b \ddot{u}(x) \dot{\varphi}(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \hat{H} \quad (*)$$

SE l'uguaglianza fosse vera per ogni $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$, avremmo gratis l'equ., cioè $f = (\ddot{u})'$ nel senso delle derivate deboli.

Però c'è la seccatura che se φ doveva avere media nulla 😞

Cosa ci salva? Non abbiamo ancora usato che f ha media nulla.

Una volta che f ha media nulla, succede che
anche se è solo $L^2(a,b)$

$$(*) \text{ vera } \forall \varphi \in \hat{H} \Rightarrow (*) \text{ vera } \forall \varphi \in H^1(a,b)$$

e a questo punto è fatta. Perché funziona? Ogui $\varphi \in H^1(a,b)$ la posso scrivere come

$$\varphi(x) = c + \hat{\varphi}(x) \\ \uparrow \in \hat{H}$$

(basta scegliere c in maniera tale che $\varphi(x) - c$ abbia media nulla) A questo punto

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= - \underbrace{\int_a^b f(x) c dx}_{=0} - \int_a^b f(x) \hat{\varphi}(x) dx \\ &\quad \text{perché } f \text{ ha media nulla} \\ &= \int_a^b \ddot{u}(x) \hat{\varphi}(x) dx \\ &\quad \uparrow \text{uguali} \\ &= \int_a^b \ddot{u}(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Una volta che $(*)$ vale per ogni $\varphi \in H^1(a,b)$, uso le $\varphi \in C_c^\infty$ e ottengo $u \in H^2(a,b)$ e $\ddot{u} = f$

A questo punto $\ddot{u}(a)$ e $\ddot{u}(b)$ hanno senso e integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \int_a^b \ddot{u}(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b \ddot{u}(x) \varphi(x) dx \\ &\quad + \ddot{u}(b) \varphi(b) - \ddot{u}(a) \varphi(a) \end{aligned}$$

Gli integrali al LHS e RHS sono uguali, quindi resta

$$u(b)\dot{\varphi}(b) - u(a)\dot{\varphi}(a) = 0$$

↑
non sono ben definiti
su $\hat{H}$

$$\forall \varphi \in C^1([a,b])$$

a media nulla

Abbiamo abbastanza libertà per avere $\dot{\varphi}(b)=1$ e $\dot{\varphi}(a)=0$ (o viceversa) da cui le NBC.

A questo punto è ben definito $A: \hat{H} \rightarrow \hat{H}$
 $f \rightarrow u$

Al solito modo si verifica che è lineare, simmetrico, compatto.

Per la compattezza, data $\{f_m\} \subseteq L^2(a,b)$ limitata, otteniamo che $\{u_m\}$ verifica le hp di A.A. (qui $\frac{1}{2}$ -Hölder ed equiuniformità grazie alle NBC). A questo punto le $\{u_m\}$ sono equi-lip e sono equiuniformi (grazie alla media nulla).

Ancora una volta si può applicare il te. spettrale ed ottenere una base di $\hat{H}(a,b)$ costituita da autovettori dell'operatore.

Oss. Non abbiamo mai usato che $f \in H^1$, ma solo che ha media nulla. Quindi volendo abbiamo costruito un operatore

$$A: L^2 \text{ a media nulla} \rightarrow L^2 \text{ a media nulla}$$

Quindi quella ottenuta è una base ortonormale di L^2 a media nulla. Chi è questa base?

Nel caso modello $(a,b) = (0,\pi)$, ragionando come nel caso Dirichlet, troviamo che gli autovalori sono $-m^2$ (gli "autovalori" della derivata seconda) e una base ortogonale è $u_m(x) = \cos(mx)$ $\ddot{u}_m = -m^2 u_m$ $m \geq 1$ intero

Oss. Volendo una base ortogonale (o ortonormale) di tutto $L^2(a,b)$, basta aggiungere una funzione costante, che è come ammettere $\cos(mx)$ con $m=0$.

(Nota bene: le costanti sono ortogonali a tutte le $u_n(x)$ precedenti, proprio perché avevano media nulla).

Morale:

→ serie di F. di soli seni = autovettori di (inverti della) derivata seconda con DBC

→ " " " coseni = " " " NBC

→ " " " con seni e coseni = ... PBC
a parità di intervallo, l'argomento non è lo stesso di sopra

$\{\sin(mx)\}$ base di $L^2(0,\pi)$

$\{\cos(mx)\}$ base di $L^2(0,\pi)$

$\{\sin(mx), \cos(mx)\}$ base di $L^2(0,2\pi)$ ↓↓

$\{\sin(\frac{m}{2}x)\}$ base di $L^2(0,2\pi)$

$\{\cos(\frac{m}{2}x)\}$ base di $L^2(0,2\pi)$

Esercizio Trattare per esteso il caso delle PBC

$$\begin{cases} \ddot{u} = f \\ u(a) = u(b) \\ \dot{u}(a) = \dot{u}(b) \end{cases}$$

utilizzando i 3 metodi (elementare, variazionale, Lax-Milgram)

Qualche osservazione c'è in quanto

$$0 = u(b) - u(a) = \int_a^b \dot{u}(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

e quindi se f a media nulla
— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 58

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

RETROPENSIERO. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \ddot{u} = \lambda u \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Da quanto visto fino ad ora il problema si risolve solo se $\lambda = -m^2$. Ma siamo sicuri?

Chi mi impedisce di prendere $\lambda = 22$ e applicare il metodo diretto? Proviamoci...

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + 11u^2 \right) dx : u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

La Lagrangiana è tranquilla, convessa, con ottime stime dal basso. Quindi il minimo esiste, MA è banalmente $u(x) \equiv 0$.

Questo da solo elimina i λ positivi. Restano i negativi. Prendiamo $\lambda = -22$.

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 - 11u^2 \right) dx : u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

Grosso guaio: abbiamo esponente 2 sia sulla derivata, sia sulla funzione. A quel p.to entrano in gioco i coefficienti e la costante di POINCARÉ.

Dato (a,b) esiste C_P , dipendente solo da $b-a$, tale che

$$\int_a^b u(x)^2 dx \leq C_P \int_a^b \dot{u}(x)^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(a,b)$$

$\uparrow$
nulle al bordo

Da questo

$$\int_a^b \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \lambda u^2 \right) dx \geq \left(\frac{1}{2C_P} - \lambda \right) \int_a^b u(x)^2 dx$$

- Se λ è piccolo (coeff. > 0), allora $u(x) \equiv 0$ è l'unico p.to di min.
- Se λ è grande (coeff. < 0), allora basta prendere

$$u_n(x) := n u_0(x)$$
dove $u_0(x) \neq 0$ realizza l'uguaglianza in Poincaré e si vede che $F(u_n) \rightarrow -\infty$, quindi addio metodo diretto.
- Se $\lambda = (2C_p)^{-1}$, allora il min. è 0, ed i p.ti di min. sono tutte le funzioni che realizzano l'uguaglianza in Poincaré.

Oss. La costante C_p è proprio il primo autovalore dell'invertito della derivata seconda con DBC.

Domanda: caratterizzare allo stesso modo il primo autovalore con NBC.

Esercizio (Operatore NON LINEARE)

Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $f \in L^2((0,1))$ esiste unica $u \in H^2((0,1))$ che risolve il problema.

Dimostrare che l'operatore non lineare

$$\begin{aligned} A: L^2((0,1)) &\rightarrow L^2((0,1)) \\ f &\rightarrow u \quad (\text{unica soluz.}) \end{aligned}$$

è compatto.

Dei 3 approcci sembra salvarsi solo quello variazionale.
Si tratta di risolvere

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + f(x)u \right) dx : u \in H_0^1((0,1)) \right\}$$

$\uparrow$ DBC

Con il metodo diretto si dimostra esistenza e unicità della soluzione.

C'è però una peccatura in fase di compattezza, perché non possiamo dire che esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A \quad \forall (x, s, p) \text{ ammissibili}$$

(Questo perché $f(x)$ potrebbe essere illimitata).

Come uscire? Ad esempio usando Hölder

$$\left| \int_0^1 f(x) u(x) dx \right| \leq \left\{ \int_0^1 f(x)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 u(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + f(x) u \right) dx &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}(x)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{4} u(x)^4 dx \\ &\quad - \left\{ \int_0^1 f(x)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 u(x)^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Ora possiamo stimare la norma L^2 con la norma L^4 ed ottenere

$$\int_0^1 u(x)^2 \cdot 1 dx \leq \left\{ \int_0^1 1^2 dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^1 u(x)^4 dx \right\}^{1/2}$$

$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$

da cui mettendo insieme

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4 - \|f\|_{L^2} \left\{ \int_0^1 u^4 \right\}^{1/4} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 + \frac{1}{8} \int_0^1 u^4 - A \end{aligned}$$

↑
ho usato che $\frac{1}{4} x - \text{cost } x^{1/4} \geq \frac{1}{8} x - A \quad \forall x \geq 0$

A questo p.to

$$F(u_m) \leq M \Rightarrow \| \dot{u}_m \|_{L^2} \leq M^1, \quad \| u_m \|_{L^4} \leq M^4$$

Alternativa: usare la sdita $|AB| \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$ e dedurre che

$$\begin{aligned}
 F(u) &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 - |f(x)u| \\
 &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{2} f^2 - \frac{1}{2} u^2 \\
 &\geq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{8} u^4 \right) dx - A \leftarrow \begin{array}{l} \text{Limitata se } \|f\|_{L^2} \text{ è} \\ \text{limitata} \end{array} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\text{ho usato che } \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \geq \frac{1}{8} x^4 - B
 \end{aligned}$$

e da qui si conclude come sopra.

Fatto questo, abbiamo la buona positura, cioè per ogni $f \in L^2$ esiste $u \in H^2$ unica che risolve, quindi posso definire l'operatore.

Si tratta di un operatore compatto? Sia $\{f_n\} \subseteq L^2(0,1)$ limitata. Vogliamo dimostrare che $\{u_n\} \subseteq L^2(0,1)$ è rel. cpt.

Slogan: se migliora, sarà quasi certamente compatto!

Seguendo con cura i ragionamenti di sopra, scopriamo che se $\{f_n\}$ è limitata, allora $\{u_n\}$ è limitata in $L^2(0,1)$. Perché? Intanto osserviamo che $F(u_n) \leq 0$ perché $u \leq 0$ è sempre un competitor.

Seguendo i ragionamenti di sopra troviamo

$$0 \geq F(u_n) \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{8} u_n^4 \right) dx - \frac{1}{2} \|f_n\|^2 - B$$

$$\text{da cui } \|u_n\|^2 \leq \frac{\|f_n\|^2 + 2B}{\frac{1}{2}}$$

limitato se f_n è limitata in L^2 .

Ma allora $\{u_m\}$ verifica le ipotesi di AA (equi $\frac{1}{2}$ -Hölder e equiuniformità grazie alle DBC o al teorema della media integrale). Quindi esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ unif., e a maggior ragione in L^2 .

Prima variante: possiamo considerare $A: L^2((0,1)) \rightarrow H^1((0,1))$.
È ancora compatto?

Slogan: se migliora lo sarà, e H^2 è meglio di H^1 .

Prendiamo $\{f_m\}$ e $\{u_m\}$ come prima, e questa volta ci serve $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in H^1 , quindi anche $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in L^2 .

Delle u_m sappiamo che sono equiuniformità in L^2 , ma così basta per convergenza forti. D'altra parte,

$$u_m = u_m^3 + f_m(x)$$

$\uparrow$ limitata in L^∞ $\uparrow$ limitata in L^2

quindi $\{u_m\}$ sono equiuniformità in L^2 , ma allora $\{u_m\}$ sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder + equi L^2 (e quindi equi L^∞ per teo media integrale, o per Rolle a scelta) e quindi ancora una volta, a meno di ulteriori s.succ., $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ adol. ritura uniformemente.

Conclusione: l'operatore è compatto e c'è pure margine!!

Seconda variante: visto come $A: L^2 \rightarrow H^2$ è ancora cpt?

Slogan: ora non migliora più tanto!

Cerchiamo di costruire un controesempio. Sia $\{f_m\} \subseteq L^2((0,1))$ una suce. limitata che non ammette s.succ. che convergono fortemente (basta prendere una base ortonormale o delle funzioni con supporti a due a due disgiunti).

Supponiamo che $\{u_n\}$ ammetta s.succ. che converge in H^2 ,
cioè

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty \quad \ddot{u}_{n_k} \rightarrow \ddot{u}_\infty$$

(tutte convergenze forti in L^2).

Dai punti precedenti sappiamo che la prima e la seconda
sono in realtà anche uniformi (senza nemmeno passare
a s.succ.: perché?) e quindi anche

$$u_{n_k}^3 \rightarrow u_\infty^3 \quad \text{unif. e in } L^2((0,1))$$

Ma allora

$$f_{n_k}(x) = \ddot{u}_{n_k} - u_{n_k}^3 \xrightarrow{L^2} \ddot{u}_\infty - u_\infty^3$$

il che avevamo assunto essere impossibile. 😊

Oss. Gli stessi argomenti mostrano che $A: L^2 \rightarrow L^2$ e
 $A: L^2 \rightarrow H^1$
sono operatori continui, cioè $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow u_n \rightarrow u_\infty$.

Domanda: l'operatore $A: L^2 \rightarrow H^2$ è continuo?

Esercizio: divertirsi a porsi domande con altre scelte di
partenza ed arrivo.

— o — o —