

A.A. 2020/2021
Istituzioni di Analisi Matematica
Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01. Legami tra coercività di funzionali e compattezza dei sottolivelli. Esempi di caratterizzazione degli insiemi compatti e delle funzioni semicontinue rispetto a nozioni di convergenza strane.	6
Lezione 02. Introduzione ai funzionali integrali. Approssimazione di funzioni continue mediante funzioni C-infinito (per via elementare). Esempi di funzionali che non ammettono minimo.	10
Lezione 03. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (FLCV), FLCV a media nulla, lemma di Du Bois Reymond: discussione con diverse classi di funzioni test.	15
Lezione 04. Varianti del FLCV e del lemma DBR con ipotesi di segno o derivate di ordine superiore.	19
Lezione 05. Esempi di applicazione del metodo indiretto: problemi di minimo per l'integrale di Dirichlet con diverse condizioni al bordo.	24
Lezione 06. Esempi di applicazione del metodo indiretto: problemi di minimo per una Lagrangiana del primo ordine con diverse condizioni al bordo.	30
Lezione 07. Esempi di applicazione del metodo indiretto: problemi di minimo per una Lagrangiana del secondo ordine con diverse condizioni al bordo.	35
Lezione 08. Metodo indiretto applicato ad una equazione non lineare, con discussione della regolarità della soluzione. Studio di un problema di minimo con dato assegnato in un punto diverso dagli estremi dell'intervallo.	40
Lezione 09. Spazi di Hilbert: disuguaglianze à la Bessel, esistenza di una base Hilbertiana senza ipotesi di separabilità, completamento di uno spazio pre-Hilbertiano.	45
Lezione 10. Esercizi sugli spazi di Hilbert: dimostrazione della non convergenza debole di alcune successioni, compattezza/chiusura forte/debole di sottoinsiemi, la palla è la chiusura debole della sfera.	51
Lezione 11. Completezza degli spazi L_p rispetto alla misura che conta i punti su ogni insieme di indici. Esempio di spazio di Hilbert non separabile con base Hilbertiana non numerabile.	57
Lezione 12. Esercizio sugli spazi di Hilbert: la somma diretta di sottospazi chiusi è necessariamente chiusa? Primi esempi di convergenza debole in spazi L_2 concreti.	63

Lezione 13. Esempi ed esercizi sulla convergenza debole di successioni di funzioni in spazi L_p	69
Lezione 14. Esempi ed esercizi sulla convergenza debole di successioni di funzioni in spazi L_p	74
Lezione 15. Derivate deboli in dimensione uno: scarsa possibilità di variare lo spazio delle funzioni test, formula di integrazione per parti, derivata del prodotto, rincollamento di derivate, esempi ed esercizi.	79
Lezione 16. Primo esempio di applicazione del metodo diretto: discussione della possibilità di formulare debolmente il problema in vari spazi.	84
Lezione 17. Approccio variazionale ai Boundary Value Problems: primi esempi. Unicità via equazione e via unicità del punto di minimo del funzionale.	89
Lezione 18. Approccio variazionale ai Boundary Value Problems: esempi con dati di Neumann omogenei e periodici. Come recuperare la compattezza in assenza di condizioni di Dirichlet.	95
Lezione 19. Approccio variazionale ai Boundary Value Problems: tre strategie per ottenere condizioni di Neumann non omogenee (Lagrangiana modificata, cambio di variabili, aggiunta dei valori agli estremi nel funzionale).	101
Lezione 20. Discussione generale dei risultati di compattezza: come ottenerli via stime di crescita e condizioni di Dirichlet, oppure via teorema della media integrale. Esempi basati sul bilancio tra la crescita rispetto alla funzione e rispetto alla derivata.	107
Lezione 21. Argomenti di troncamento: interpretazione variazionale ed in termini di equazione di Eulero (principio del massimo e principio del massimo forte).	112
Lezione 22. Esempi di formulazioni variazionali con Lagrangiane che non sono definite ovunque. Utilizzo di opportuni argomenti di troncamento per ricavare l'equazione di Eulero-Lagrange.	117
Lezione 23. Il prodotto di una successione convergente uniformemente e di una convergente debolmente è ancora debolmente convergente. Esempio di utilizzo dell'identità di Beltrami.	122
Lezione 24. Esempio di problema variazionale con perdita di ellitticità in un punto.	127
Lezione 25. Regolarità Holderiana ottimale per il minimo di un problema variazionale con perdita di ellitticità. Principio del massimo stretto sotto ipotesi di ellitticità.	132
Lezione 26. Perdita di ellitticità vs perdita di unicità per il problema di Cauchy associato all'equazione di Eulero vs mancanza di principi del massimo stretti. Approccio variazionale all'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali.	137
Lezione 27. Una disuguaglianza del parallelogramma implica l'identità. Dimostrazione alternativa che l'identità del parallelogramma implica che la norma deriva da un prodotto scalare. Norme p -esime che derivano da un prodotto scalare.	142

Lezione 28. Discussione sull'esistenza del punto di minima distanza da un chiuso in uno spazio metrico. Stretta convessità della norma ed unicità della proiezione su un convesso chiuso in uno spazio normato. Esempi di non unicità. Norme p -esime strettamente convesse.	147
Lezione 29. Proiezione sulla palla unitaria in spazi normati: minimizzazione della distanza e costante di Lipschitz. Calcolo della proiezione su un iperpiano affine in uno spazio di Hilbert.	151
Lezione 30. Coni convessi in spazi di Hilbert e relative proiezioni. Esempi di convessi chiusi in spazi L^2 e calcolo delle relative proiezioni.	155
Lezione 31. Ruolo della convessità della Lagrangiana rispetto alla derivata per l'esistenza e non esistenza di punti di minimo. Costruzione di successioni minimizzanti con oscillazioni su una doppia scala.	160
Lezione 32. Esistenza e non esistenza di minimi a seconda della crescita della Lagrangiana rispetto alle sue variabili. Esempio di utilizzo dei moltiplicatori di Lagrange.	165

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 01

Note Title

28/09/2020

Calcolo delle Variazioni : $\rightarrow$ Metodo indiretto
 $\rightarrow$ Metodo Diretto (teo. di Weierstrass)

$$\min \{ F(x) : x \in X \}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ insieme
 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Nozione di convergenza in X = lista delle succ. convergenti e dei relativi limiti.
 $\downarrow$
 compatti + funzioni SCI

Weierstrass classico $F: X \rightarrow \mathbb{R}$. Allora esiste il minimo.
 $\uparrow$ SCI $\uparrow$ cpt.

Oss. Tutta la difficoltà del problema: trovare nozione di conv. che renda X cpt. e F SCI.

Esercizio 1 Sia X insieme e sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che
 $\min \{ F(x) : x \in X \}$
 esista.

Allora esiste almeno una nozione di convergenza che renda X compatto e F SCI.

Dim (pregatura) Sia $x_0 \in X$ un p.to di min, cioè
 $F(x_0) \leq F(x) \quad \forall x \in X$.

Prendiamo la nozione secondo cui ogni succ. in X conv. a x_0
 Si verifica che funziona! La cpt. è quasi ovvia.

Se $x_n \rightarrow x_0$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \geq F(x_0) \quad \text{😊}$$

Varianti di W. con coercività.

Def. Una $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice coerciva se esiste $K \subseteq X$ cpt., $\neq \emptyset$
(se $\{x_n\} \subseteq K$ è succ., allora esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in K$ secondo la nozione) tale che

$$\inf \{F(x) : x \in X\} = \inf \{F(x) : x \in K\}.$$

Teorema (W. generalizzato) Se $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ è SCI + coerciva, allora $\min \{F(x) : x \in X\}$ esiste.

Come verifico la coercività? Ci sono due condizioni suff. (non necessarie).

→ Esiste un sottolivello cpt. e non vuoto di F , cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\emptyset \neq S_M := \{x \in X : F(x) \leq M\} \quad \text{e cpt.}$$

↑ di solito è importante

→ Tutti i sottolivelli di F sono cpt
(Un sottolivello $\neq \emptyset$ esiste per forza ...) } più usata nelle applicas.

In entrambi i casi si tratta di osservare che la battaglia per il minimo si gioca in un qualunque sottolivello $\neq \emptyset$.

Cosa vuol dire operativamente verificare che i sottolivelli sono compatti?

Prendere una qualunque succ. $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $F(x_n) \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per un qualunque M fisso, e dimostrare che esiste $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in$ sottolivello (automatico se F è SCI)

La nozione di *conv.* può essere davvero strana!

Esempio 1 $X = \mathbb{N}$. Le succ. *conv.* sono solo quelle costanti, e convergono al valore stesso.

- Chi sono le funzioni SCI? Tutte! Anzi sono pure continue
- Chi sono i sottoinsiemi compatti? Tutti e soli quelli con un numero finito di elementi. (Se X ha ∞ elementi, allora esiste una succ. x_n iniettiva, e questa non può avere s.succ. costanti, che sono le uniche *conv.*)

Esempio 2 $X = \mathbb{N}$. Le succ. *conv.* sono solo quelle costanti, e $x_n \equiv k$ converge a $k+1$.

- chi sono le funzioni SCI? Seme che

$$\begin{array}{ccc} F(k) & \geq & F(k+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ x_n & & x_{n+1} \end{array} \quad x_n \rightarrow x_\infty$$

quindi sono le funzioni decrescenti.

- Chi sono i compatti? Se K è compatto e $i \in K$, allora la successione $x_n \equiv i$ deve avere s.succ. *conv.* a $x_\infty \in K$, quindi $i+1 \in K$. Quindi

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad [i \in K \Rightarrow i+1 \in K]$$

Quindi K deve essere una semiretta destra!

Una semiretta d_x può essere *cpt.*?

No! Altrimenti $F(x) = \frac{1}{x}$ su $\mathbb{N}$ verificherebbe le hp di W rispetto a questa nozione di *conv.*, quindi avrebbe un ∞ e palesemente non lo ha.

Perché le semirette d_x non sono *cpt.*?

Hanno ∞ elementi, quindi contengono $\{x_n\}$ iniettiva che non può avere s.succ. *conv.* (dovrebbero essere costanti)

L'unico *cpt.* è il $\emptyset$.

Esempio 3 $X = \mathbb{N}$. Ogni s.succ. converge e conv. a 2020.

Chi sono i cpt? $K \subseteq X$ è cpt. se e solo se $K = \emptyset$ oppure $2020 \in K$

Chi sono le funzioni SCI? Sono tutte e sole quelle con minimo in 2020!!

Devo dim. che $F(x) \geq F(2020) \quad \forall x \in X$. Supponiamo per assurdo che

$$\exists y \in X \text{ t.c. } F(y) < F(2020)$$

Prendo $x_n \equiv y$. Ora $x_n \rightarrow 2020$ col essendo F SCI

$$F(2020) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = F(y) < F(2020).$$

$\uparrow$
succ costante

Esempio 4 $X = \mathbb{N}$. Ogni succ. conv. a qualunque limite!!

Chi sono i compatti? Tutti (ogni succ. ha s.succ. che converge ad un elemento di K . Ha anche tante s.succ. che convergono ad el. che $\notin K$, ma questo è irrilevante)

Chi sono le funzioni SCI? Sono solo le costanti. Infatti se esistono

$$F(y_1) < F(y_2)$$

allora basta prendere $x_n \equiv y_1$. Oservo che $x_n \rightarrow y_2$, e quindi

$$F(y_2) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(y_1) = F(y_1) < F(y_2).$$

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 02

Note Title

28/09/2020

FUNZIONALI INTEGRALI

- Modello base:
- $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$
 - $L : \underset{x}{(a, b)} \times \underset{u}{\mathbb{R}} \times \underset{p}{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ (Lagrangiana)
 - $u \in C^1([a, b])$
 u è derivabile in (a, b) con derivata continua che si estende fino al bordo

$$F(u) := \int_a^b L(x, u(x), u'(x)) dx$$

Le possibili varianti sono tantissime

→ Lagrangiana che dipende da derivate successive

$$F(u) = \int_a^b L(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n)}(x)) dx$$

(Non complica più di tanto la vita)

→ integrale improprio: $(a, b) \rightsquigarrow (a, +\infty)$

→ $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (due o più variabili in arrivo)

$$F(u, v) = \int_a^b L(x, u(x), v(x), u'(x), v'(x)) dx$$

↑ ↑
due componenti scalari

→ più variabili in partenza $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$F(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

↑ integrale multiplo in $\mathbb{R}^d$

→ più variabili in partenza ed arrivo.
— o — o —

Idea generale : • il passaggio da una $a + \text{derivate}$ è innocuo
• il passaggio da (a,b) ad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ complica la vita
• se ci sono più var. in partenza ed arrivo son dolori.
— o — o —

Problema classico

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b L(x, u, u') dx}_{F(u)} : u \in \underbrace{\text{insieme di funzioni}}_{\times} \right\}$$

Possibili scelte: $u \in C^1([a,b])$ + condizioni al bordo (BC)
 $\uparrow \uparrow$ classe di regolarità

Può avere senso anziane sotto C^1 come regolarità
— o — o —

RISULTATI DI APPROSSIMAZIONE

Prop. Sia $u \in C^0([a,b])$. Come sempre: $u : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$.
Allora esiste una successione $\{u_m\} \subseteq C^\infty((a,b))$ tale che

- (i) $u_m \rightarrow u$ uniformemente in $[a,b]$
- (ii) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|u_m(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Dim via cannone Usare le convoluzioni

Dim da Analisi 1 La road map è la seguente

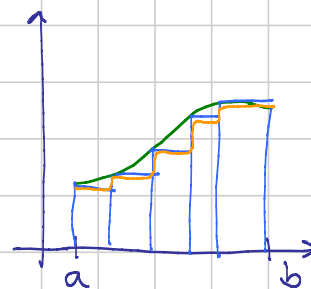
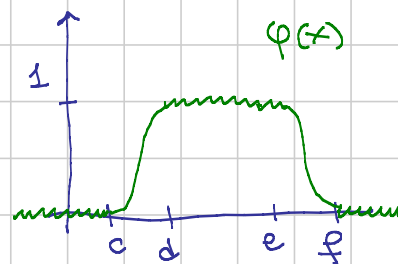
Step 1 Dati $c < d < e < f$ esiste una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ come in figura

Step 2 Data u continua e dato $\varepsilon > 0$, esiste una step function u_ε (comb. lin. finita di caratteristiche di intervalli) tale che

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

Basta dividere $[a, b]$ in parti "piccole" (anche non nec. uguali) e definire $u_\varepsilon(x) = \text{valore in un p.to a caso dell'intervallino}$.

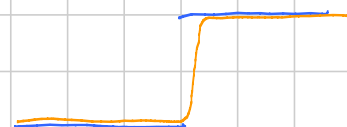
Perché funziona? Uniforme continuità



Step 3 "Smussare gli angoli".

Idea: $u_\varepsilon(x)$ è somma di caratteristiche di intervalli moltiplicate per opportune costanti. Sostituisco le caratteristiche con funzioni come quelle dello step 1.

Oppure applico la costruzione dello step 1 per racconciare due tratti successivi



Mettendo insieme si vede che (i) e (ii) sono verificate.

— o — o —

Oss. Se voglio approssimare con funzioni $C^1([a, b])$ bastava porre

$$u_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \hat{u}(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

media di u
tra x e $x+\varepsilon$

$\hat{u}$ estesa a tutto $\mathbb{R}$ ponendo
 $\hat{u}(x) = u(a)$ per $x \leq a$
 $\hat{u}(x) = u(b)$ per $x \geq b$

Si vede che $u_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ e $u'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} (\hat{u}(x+\varepsilon) - \hat{u}(x))$

e si vede che u_ε sono equiuniformi e $u_\varepsilon \rightarrow u$ unif. in $[a,b]$ (uniforme continuità)

Esempio 1

$$\min \left\{ \underbrace{\int_0^\pi (u - \sin x)^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{u \in C^0([a,b]), u(0) = u(\pi) = 1}_{\times} \right\}$$

Brutal mode: u vorrebbe essere $\sin x$, ma allora se è continua non può fare 1 in 0 e π .

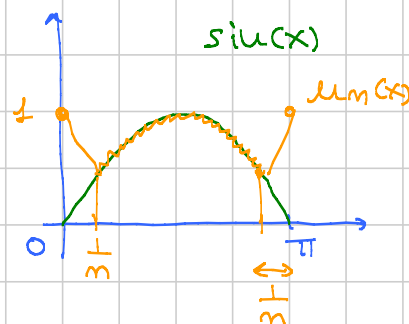
CLAIM: il minimo non esiste e $\inf = 0$.

Ovvio: $\inf \geq 0$

Cerco un ammissibile tale che $F(u_n) \rightarrow 0$.

Si vede abbastanza bene che

$$\begin{aligned} F(u_n) &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} (u_n(x) - \sin x)^2 dx \\ &\quad + \int_{\pi - \frac{1}{n}}^\pi (u_n(x) - \sin x)^2 dx \\ &\leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{quindi } \inf = 0 \end{aligned}$$



Min non esiste $(u(x) - \sin x)^2 \geq 0$ e continua. Per avere $\int = 0$ deve essere $\equiv 0 \leadsto$ addio BC.

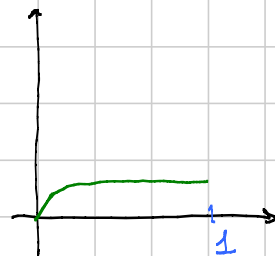
Esempio 2

$$\min \left\{ \int_0^1 \{ \dot{u}(x)^2 + u(x)^2 \} dx : \dot{u}(0) = 2, u \in C^1([0,1]) \right\}$$

Anche in questo caso $\inf = 0$ e $\min$ N.E.

Cose ovvie: $\inf \geq 0$

$\min$ N.E. (u dovrebbe essere $\equiv 0$)

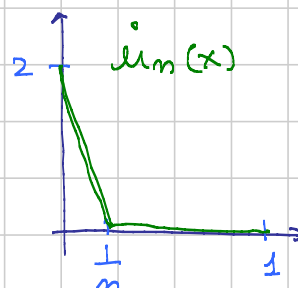


Meno ovvio: trovare successione infizzante u_n

Prendo la primitiva della funzione disegnatasi che fa 0 in 0.

$$\int_0^1 \dot{u}_n^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} \dot{u}_n^2 \leq \frac{4}{n} \rightarrow 0$$

$$u_n(x) = \int_0^x \dot{u}_n(t) dt \leq \frac{2}{n} \quad (\text{distinguere } x > \frac{1}{n} \text{ e } x \leq \frac{1}{n})$$



$$\Rightarrow \int_0^1 u_n(x)^2 dx \leq \frac{4}{n^2} \rightarrow 0$$

Oss. Non avrei potuto fare il punto

→ nel 1° caso se c'era $\dot{u}^2$ nel funzionale
 → " 2° " " u^2 "

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 03

Note Title

29/09/2020

FLCV, FLCV a media nulla, DBR (e varianti)

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V$$

Ω ↑ Data
 $f \in C^0(\Omega)$
 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$\uparrow$ funzione test
 $\uparrow$ classe di funzioni
 $C_c^\infty(\Omega)$

Domanda: cosa possiamo dedurre su f ?

Prendiamo FLCV, anche nel caso classico ($f \in C^0(\Omega)$).

Quando posso indebolire la classe V delle funzioni test?

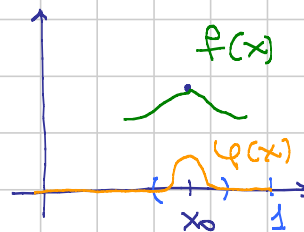
Esempio 1 $\Omega = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$

$$V = \{v \in C^1([0,1]) : |v(x)| + |v'(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]\}$$

[S1] Si ricicla la dim. classica.

Supponiamo wlog $f(x_0) > 0$

Allora esiste $\eta > 0$ t.c.



$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$$

Prendo $\varphi(x) \in C_c^\infty((0,1))$ che è > 0 solo vicino a x_0 . Pongo

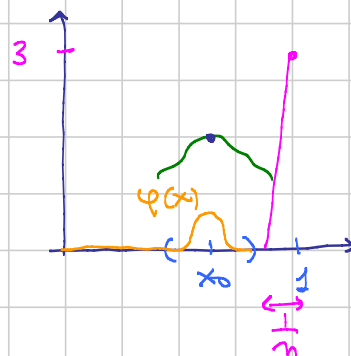
$$v(x) = \varepsilon \varphi(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

e per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo $v \in V$.

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(1) = 3 \}$$

[S1] Tecnica di approssimazione.
Definiamo come prima fino a φ .
Poiiamo

$$v_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \\ \text{racordo } C^1 & \text{se } x \in [1 - \frac{1}{n}, 1] \\ \text{che la porta in} & \\ 3 \text{ per } x=1 & \end{cases} \quad (\text{parabola})$$



$$0 = \int_0^1 f(x) v_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) \varphi(x) dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}$
abb. grande

- conv. puntuale dominata
- spetto d' integrale e osservo che la seconda va a 0.

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : v(\frac{1}{2}) = 3 \}$$

[S1] Non cambia nulla rispetto a prima se $x_0 \neq \frac{1}{2}$.
Ma in realtà basta dim. che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \neq \frac{1}{2}$.
 $\uparrow$ [=0, corretto dopo video]

$$V = \{ v \in C^1([0,1]) : \int_0^1 v(x) dx = 3 \}$$

[S1] Prendo la solita φ e poi pongo $v(x) = c\varphi(x)$ per una opportuna c costante. Visto che $\int \varphi > 0$, allora esiste c t.c. $\int c\varphi = 3$. (Essendo $3 \neq 0$, anche $c \neq 0$)

$$V = \{ v \in C^0([0,1]) : \int_0^1 v(x) dx = 0 \}$$

No nel caso Lebesgue Basta prendere

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Allora

$$\int_0^1 f(x) v(x) dx = \int_0^{1/2} v(x) dx = 0$$

$\uparrow$ def. f $\uparrow$ def. di V

Lo stesso esempio non funziona nel caso classico. Cosa possiamo dedurre se inoltre $f \in C^0([0, 1])$?

→ Sicuramente $f(x_0) = 0$ per ogni $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ (stessa dim di sempre)

→ Sicuramente $f(x)$ è costante in $(0, \frac{1}{2})$ (qui posso applicare FLCV a media nulla)

Per continuità in $\frac{1}{2}$, la costante deve essere nulla.

Quali sono le proprietà decisive della classe V per avere FLCV.

Esempio 2 (FLVC a media nulla vs DBR)

$\Omega = (0, 1) \cup (2, 3)$ Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Scenario 1: $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega) \quad \int_{\Omega} v(x) dx = 0$

Scenario 2: $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^{\infty}(\Omega)$

Possiamo dedurre che f è costante?

Idea fondamentale: su un intervallo le derivate di funzioni C_c^{∞} sono tutte e sole le C_c^{∞} a media nulla

Scenario 1: SI è proprio FLCV a media nulla (controllare che la connessione di Ω non serva nella dimostrazione, e cioè che le due comp. connesse "si parlano")

Scenario 2: No DBR $\Rightarrow f$ è costante nei 2 intervalli $(0,1)$ e $(2,3)$
 Ma le costanti possono essere diverse!

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & x \in (0,1) \\ c_2 & x \in (2,3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) \dot{v}(x) dx &= \int_0^1 c_1 \dot{v}(x) dx + \int_2^3 c_2 \dot{v}(x) dx \\ &= c_1 [v(x)]_0^1 + c_2 [v(x)]_2^3 \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Quindi nello scenario 2 i due pezzi di Ω "non si parlano"

Brutal mode:

$$\int_a^b f(x) \dot{v}(x) dx \stackrel{\text{per parti}}{=} \underbrace{[f(x)v(x)]_{x=a}^{x=b}}_{0} - \int_a^b \dot{f}(x) v(x) dx$$

Ocdio: a priori $\dot{f}(x)$
 NON ESISTE.

$\downarrow \neq \text{FLCV}$
 $\dot{f}(x) \equiv 0$
 $\downarrow$
 f è costante sulle componenti connesse

Oss. più generale $\int_{\Omega} f(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V$ sto dicendo che

f è ortogonale a tutti gli elementi di V nel senso $L^2(\Omega)$ del termine. Questo implica l'ortogonalità a $\text{Clos}(\text{Span}(V))$

Idea: FLCV è ok se $\text{Clos}(\text{Span}(V)) = L^2(\Omega)$, almeno se $f \in L^2(\Omega)$
 [Commenti finali su ortogonalità nel video].

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 04

Note Title

29/09/2020

Varianti con segno di FLCV e DBR

Esempio 1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto, sia $f \in C^0(\Omega)$. Supponiamo

$$\int_{\Omega} f(x) v(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ in } \Omega$$

Cosa possiamo dedurre?

Claim: $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$ Si ricicla la solita dim.

Supponiamo $f(x_0) < 0$. Allora $\exists r > 0$ t.c.

$$f(x) \leq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

↑
palla



Prendo una v radiale positiva vicino a x_0 e nulla fuori da $B(x_0, r)$.

È evidente che $\int_{\Omega} f v = \int_{B(x_0, r)} f v < 0$



Esempio 2 Stessa cosa con ipotesi solo $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Basta dimostrare che $f(x) \geq 0$ quasi ovunque in ogni palla $B(x_0, r) \subset \subset \Omega$

↑ la misura è contenuta

Se così non fosse, esisterebbe $N \subseteq B(x_0, r)$ con $\text{meas}(N) > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in N$. Anzi posso fare in modo che

$$f(x) \leq \alpha < 0 \quad \forall x \in N$$

↑
costante fissa (spiegazione nel video)

Consideriamo $\{v_m\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ ma anche $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.c.

- $v_m(x) \equiv 0$ fuori da $B(x_0, r)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
- $0 \leq v_m(x) \leq 1$ in $B(x_0, r)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
- $v_m(x) \rightarrow$ funzione caratteristica di N (cioè 1 in N e 0 fuori)

Ma allora $\int_{\Omega} f(x) v_m(x) dx \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 $\downarrow \leftarrow$ conv. puntuale dominata (da che?)

$$\int_{\Omega} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{caratteristica di } N}}{1_N(x)} dx = \int_N f(x) dx \leq \alpha \text{meas}(N) < 0$$

Oss. Sistemare i dettagli del lemma di approssimazione

Esempio 3 (DBR con segno) Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e sia
 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a, b)) \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

Cosa possiamo dedurre?

Brutal mode: integriamo per parti! [Ovviamente non potremmo]

$$0 \leq \int_a^b f(x) v(x) dx = \underbrace{[f(x) v(x)]_a^b}_0 - \int_a^b \dot{f}(x) v(x) dx$$

$$\leadsto \int_a^b \dot{f}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in \dots \text{ t.c. } v(x) \geq 0 \text{ in } (a, b)$$

$\uparrow$ [≤ 0 : corretto dopo video]

$$\leadsto \dot{f}(x) \leq 0 \text{ in } (a, b) \leadsto f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b).$$

Proviamo a dimostrarlo. Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora esistono $a < x_1 < x_2 < b$ tali che

$$f(x_2) > f(x_1)$$

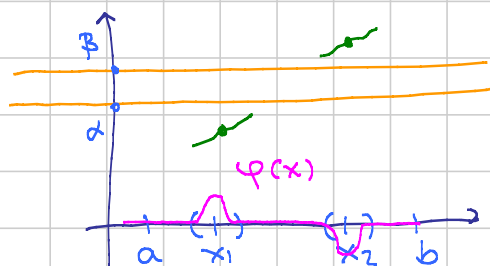
Per continuità esistono

$$f(x_1) < \alpha < \beta < f(x_2)$$

ed esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in [x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon]$$

$$f(x) \geq \beta \quad \forall x \in [x_2 - \epsilon, x_2 + \epsilon]$$



Ora prendo $\varphi(x)$ come in figura, cioè positiva vicino a x_1 e negativa vicino a x_2 e inoltre SIMMETRICA e definisco

$$v(x) = \int_a^x \varphi(t) dt = \text{primitiva di } \varphi \text{ che si annulla in } a \text{ e quindi anche in } b \text{ per simmetria}$$

Osservo che $v(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ perché v è crescente nella prima parte e poi decrescente e infine

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} f(x) \varphi(x) dx + \int_{x_2-\epsilon}^{x_2+\epsilon} f(x) \varphi(x) dx$$

$$\leq \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} \alpha \varphi(x) dx + \int_{x_2-\epsilon}^{x_2+\epsilon} \beta \varphi(x) dx$$

$$\left(\text{ho usato } \begin{matrix} f \leq \alpha \\ \varphi \geq 0 \end{matrix} \right) \quad \left(\text{ho usato } \begin{matrix} f \geq \beta \\ \varphi \leq 0 \end{matrix} \right)$$

$$= (\alpha - \beta) \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} \varphi(x) dx < 0$$

↑
ho usato che nel 2° intervallo l'integrale di φ è uguale al 1° cambiato di segno.

da cui l'assurdo.

Esempio 4 Cosa possiamo dedurre se

$$\int_a^b f(x) v'(x) dx \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b)) \quad (\text{senza ipotesi di segno})$$

Tesi: $f \equiv c$ e in realtà $\int f v' = 0$ sempre
(La stessa cosa vale per FLCV mettendo ≥ 0 nell'ipotesi)

Usiamo DBR classico: se $f \not\equiv c$, allora esiste v tale che

$$\int f v' \neq 0. \text{ Se } \int f v' < 0 \text{ allora OK, se } \int f v' > 0 \text{ basta considerare } -v$$

Cosa possiamo dedurre se $\int f v' = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \dots$ con $v \geq 0$ sempre?

Anche in questo caso $f \equiv c$, ma occorre neutralizzare nella dimostrazione del DBR.

Esempio 5 Supponiamo

$$\int_a^b f(x) v''(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Cosa possiamo dedurre?

Brutal mode

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(x) v''(x) dx = \overset{0}{\left[f(x) v'(x) \right]_a^b} - \int_a^b \dot{f}(x) v'(x) dx \\ &= - \underset{0}{\left[\dot{f}(x) v(x) \right]_a^b} + \int_a^b \ddot{f}(x) v(x) dx \\ &= \int_a^b \ddot{f}(x) v(x) dx \rightsquigarrow \ddot{f}(x) = 0 \rightsquigarrow f(x) = A + Bx \end{aligned}$$

L'idea è di dimostrare che $f(x)$ è un polinomio di 1° grado.

Oss 1 Vale che

$$\{ \ddot{v}(x) : v \in C_c^\infty((a,b)) \} = \left\{ \varphi \in C_c^\infty : \int_a^b \varphi(x) = \int_a^b x \varphi(x) = 0 \right\}$$

[Conetto dopo video: non è $\ddot{\varphi}$ nell'integrale, ma la prima derivata di φ nulla al bordo]

Oss 2 Se $\int_a^b f(x) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \text{classe RHS di sopra}$

allora vale

$$\int_a^b (f(x) - A - Bx) \varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in \text{classe RHS di sopra}$$

Ora scelgo A e B in maniera tale che

$$\int_a^b (f(x) - A - Bx) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b (f(x) - A - Bx) x dx = 0$$

(posso perché sistema lineare).

A questo punto vorrei usare $\varphi(x) = f(x) - A - Bx$.

In generale non potrò, ma posso approssimare $\varphi_n \rightarrow \varphi$ come in una delle varie dim. del FLCV a media nulla.

[Sistemare i dettagli del lemma di approssimazione].

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 05

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

29/09/2020

Prerequisiti : (ELE) + BC.

Vogliamo studiare il minimo di $F_1(u) := \int_0^2 \dot{u}^2 dx$
con diverse condizioni.

Salvo controlli, consideriamo $u \in C^1([0,2])$

$$\boxed{1} \quad u(0) = 3 \quad \text{e} \quad u(2) = 8 \quad \text{DBC}$$

(ELE) diventa $\begin{cases} \ddot{u} = 0 \\ + \text{BC} \end{cases} \rightsquigarrow$ esiste una unica $u_0(x)$ che
risolve (retta che congiunge)

Questa $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.

Ogni altra $w \in C^1([0,2])$ che soddisfa le BCs la scrivo come

$$w(x) = u_0(x) + v(x)$$

$\downarrow$ nulla al bordo

$$F_1(w) = \int_0^2 (\dot{u}_0 + \dot{v})^2 = \int_0^2 \dot{u}_0^2 + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2}_{\geq 0} + 2 \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v}}_{=0 \text{ (1ª forma int. di ELE)}} \geq F_1(u_0)$$

$F_1(u_0)$

e vale il segno di $=$ se e solo se $\dot{v} \equiv 0 \rightsquigarrow v$ è una costante
 $\rightsquigarrow$ essendo nulla al bordo $v \equiv 0$, cioè $w \equiv u_0$

$$\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{per parti}}}{=} \underbrace{[\dot{u}_0 v]_0^2}_{=0} - \underbrace{\int_0^2 \ddot{u}_0 v}_{=0} = 0$$

$\parallel$
perché v è 0 al bordo

Oss. Posso davvero fare l'integr. per parti perché u_0 abbastanza regolare.

$$\boxed{2} \quad u(0) = 5 \quad \begin{cases} \ddot{u}_0 = 0 & \text{ELE} \\ u(0) = 5 & \text{DBC} \\ \dot{u}(2) = 0 & \text{NBC che nasce su the road} \end{cases}$$

L'unica soluzione è $u_0(x) \equiv 5$. È l'unico p.to di min.

$$w = u_0 + v \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{competitore} \\ \text{generico} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ v(0) = 0 \end{matrix} \quad (\text{in } x=2 \text{ non so nulla})$$

$$F_1(w) = \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_0^2}_{F_1(u_0)} + \int_0^2 \underbrace{\dot{v}^2}_{\geq 0} + 2 \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_0 \dot{v}}_0 \geq F_1(u_0) = 0$$

$$\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} = \left[\dot{u}_0 v \right]_0^2 - \int_0^2 \ddot{u}_0 v = 0$$

$$\begin{matrix} \dot{u}_0(2)v(2) - \dot{u}_0(0)v(0) \\ \uparrow \uparrow & \uparrow \uparrow \\ \text{NBC} & \text{condizione su } v \end{matrix}$$

Vale il segno di = se e solo se $\dot{v} \equiv 0$, cioè v costante, ma allora $v \equiv 0$ perché $v(0) = 0$.

$\boxed{3}$ Nessuna condizione $\min = 0$ e i p.ti di minimo sono tutte e sole le funzioni costanti

$$\begin{cases} \ddot{u} = 0 & \text{ELE} \\ \dot{u}(0) = 0 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{cases} \quad \text{NBC on the road}$$

$\boxed{4}$ $u(0) = u(2)$ (PBC). Come nel caso 3, $\min = 0$ e tutte le costanti sono p.ti di min.

$$\ddot{u} = 0 \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \quad (\text{on the road}) \quad u(0) = u(2)$$

[5] $u(0) = -u(2)$ A occhio si vede che l'unica soluzione è $u_0(x) \equiv 0$.

$\mathbb{X} := \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = -u(2)\}$ sp. vettoriale

$$\varphi(t) = F_1(u+tv) = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2$$

$$\delta F_1(u, v) := \varphi'(0) = 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v}$$

La funzione u per essere un p.to di minimo deve soddisfare

$$\underbrace{\int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx = 0}_{1^a \text{ forma integr. di ELE}} \quad \forall v \in \mathbb{X}$$

Supponendo + regolarità, integro per parti:

$$\boxed{\dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) - \int_0^2 \ddot{u}v dx = 0} \quad \begin{array}{l} 2^a \text{ forma int.} \\ \text{di ELE} \end{array}$$

→ Fase 1: uso $v \in C_c^\infty((0,2)) \subseteq \mathbb{X} \leadsto$ ottengo $\ddot{u} = 0 \quad \forall x \in (0,2)$

→ Fase 2: sparito l'integrale resta

$$0 = \dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) = (\dot{u}(2) + \dot{u}(0))v(2) \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ v \in \mathbb{X} \end{array}$$

Potendo scegliere $v(2) \neq 0$ otteniamo $\dot{u}(2) = -\dot{u}(0)$

In conclusione un eventuale p.to di min. deve soddisfare

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = 0 & \forall x \in (0,2) & \text{ELE diff.} \\ u(0) = -u(2) & & \text{BC data all' inizio} \\ \dot{u}(0) = -\dot{u}(2) & & \text{BC nota on the road} \end{cases}$$

Sostituendo $u(x) = a + bx$ si ottiene $a = b = 0$.

È facile vedere che è davvero p.to di min.

[6] $X := \{ u \in C^1([0,2]) : \int_0^2 u(x) dx = 8 \}$ sp. affine con
sp. vett. di riferimento

$$V := \{ u \in C^1 \dots : \int_0^2 u(x) dx = 0 \}$$

Al solito modo: condizione nec. affinché u sia p.to di min è

$$0 = \delta F_1(u, v) = 2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx \quad \forall v \in V \quad \text{ELE int. 1}$$

Integrando per parti

$$0 = \dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) - 2 \int_0^2 \ddot{u} v dx$$

→ Fase 1: scelgo $v \in C_c^\infty((0,2))$ con $\int_0^2 v(x) dx = 0$
deve essere $v \in V$

Senza termini di bordo otteniamo

$$\int_0^2 \ddot{u} v dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty \text{ a media nulla}$$

FLCV a media nulla $\Rightarrow \ddot{u} = \text{costante} = c$

→ Fase 2: sparito l'integrale, e potendo scegliere $v(0)$ e $v(2)$
a piacimento, otteniamo $\dot{u}(2) = \dot{u}(0) = 0$.

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= c & \text{ELE diff.} \\ \dot{u}(0) &= 0 \\ \dot{u}(2) &= 0 & \left. \begin{array}{l} \ddot{u}(0)=0 \\ \ddot{u}(2)=0 \end{array} \right\} \text{NBC on the road} \\ \int_0^2 u(x) dx &= 8 & \text{condizione int. iniziale} \end{aligned}$$

$$u(x) = \frac{c}{2} x^2 + ax + b \rightsquigarrow \text{impongo le condizioni} \rightsquigarrow a = c = 0 \quad b = 4$$

$u_0(x) \equiv 4$ e si vede facilmente che è l'unico p.to di min.

Ogni altro competitor si scrive come $w = u_0 + v$

$$F_1(w) = F_1(u_0) + \int_0^2 \dot{v}^2 dx + \underbrace{2 \int_0^2 u_0 \dot{v}}_0$$

(stessi passaggi di sopra)

Vale il segno di $=$ se e solo se $\int_0^2 \dot{v}^2 = 0 \leadsto v = \text{costante}$

e la costante è nulla perché $\int_0^2 v = 0$.

$$\boxed{7} \quad \mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, \int_0^2 u(x) dx = 8\}$$

$$V = \{v \in C^1([0,2]) : v(0) = 0, \int_0^2 v(x) dx = 0\}$$

Come sopra otteniamo

$$u''(x) = c \quad \leadsto \quad u(x) = \frac{c}{2} x^2 + ax + b$$

$$u(0) = 3$$

$$u'(2) = 0$$

$$\int u(x) dx = 8$$

Usando le 3 condizioni determino in modo unico a, b, c

Otengo così una $u_0(x)$ che è l'unico p.to di min. (verifica come sopra).

$$\boxed{8} \quad \mathbb{X} = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, \dot{u}(1) = 3\}$$

CLAIM: min non esiste e $\inf = 0$.

↑ condizione che coinvolge le derivate prime: forse riesco a "fregarla"

Se $\inf = 0$, allora min non esiste.

Se esistesse sarebbe 0, quindi u sarebbe costante, quindi $\dot{u}(1) = 0$

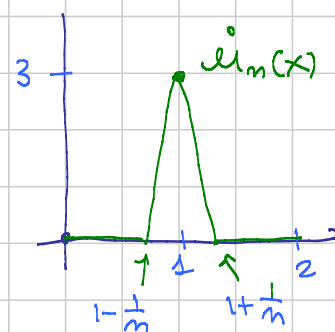
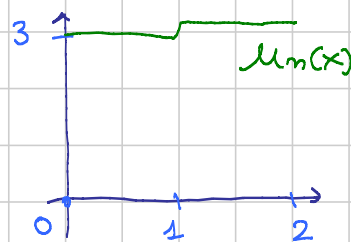
Devo trovare una succ. infinita, cioè $\{u_n\} \subseteq \mathbb{X}$ b.c.

$$F_1(u_n) \rightarrow 0$$

La cosa più comoda è definire $\dot{u}_n(x)$

Si vede subito che

$$\begin{aligned} F_1(u_n) &= \int_0^2 \underbrace{\dot{u}_n(x)^2}_{\leq 9 \text{ ovunque}} dx \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \dot{u}_n(x)^2 dx \leq \frac{2}{n} \cdot 9 \end{aligned}$$



Basta quindi porre $u_n(x) := 3 + \int_0^x \dot{u}_n(t) dt$.

— o — o —

Idea generale brutale: se la Lagrangiana contiene solo derivate prime, le condizioni imposte su $\dot{u}$ potrebbero essere "aggirabili".

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 06

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

30/09/2020

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 - 7u) dx$$

Conti preliminari:

$$\varphi(t) = F(u+tv) = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t \int_0^2 \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2 - 7 \int_0^2 u - 7t \int_0^2 v$$

$$\delta F(u, v) = \varphi'(0) = 2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v} - 7 \int_0^2 v$$

$$\boxed{1} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^1([0, 2])\} \quad \text{sp. vettoriale} = V$$

$$u \text{ p.to di min.} \Rightarrow 2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v} - 7 \int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

Se si può integrare per parti si arriva a

$$2 \dot{u}(2)v(2) - 2 \dot{u}(0)v(0) - 2 \int_0^2 \ddot{u} v - 7 \int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\underline{1^a \text{ fase}} \rightsquigarrow v \in C_c^\infty((0, 2)) \rightsquigarrow 2 \ddot{u} = -7$$

$$\underline{2^a \text{ fase}} \rightsquigarrow \text{essendo } v(2) \text{ e } v(0) \text{ liberi} \rightsquigarrow \dot{u}(0) = \dot{u}(2) = 0.$$

Quindi otteniamo che un p.to di min. abbastanza regolare risolve

$$\begin{cases} \ddot{u}(x) = -\frac{7}{2} & \rightsquigarrow u(x) = -\frac{7}{4}x^2 + ax + b \\ \dot{u}(0) = 0 & \rightsquigarrow \dot{u}(x) = -\frac{7}{2}x + a \\ \dot{u}(2) = 0 & \rightsquigarrow -7 + a = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} a=0 \\ -7+a=0 \end{array} \right\} \text{Grosso guaio}$$

Non si trovano soluzioni di ELE diff + NBC su the road.

CLAIM : $\inf = -\infty$ e il minimo non esiste!! } queste due righe risolvono il problema

Basta considerare la succ. $u_n(x) \equiv n$.

$$\boxed{2} \quad X := \{u \in C^1([0,2]) : u(2) = 5u(0)\} = V$$

Come al solito arriviamo a

$$2\dot{u}(2)v(2) - 2\dot{u}(0)v(0) - 2\int_0^2 \ddot{u}v - 7\int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

1ª fase $\leadsto 2\ddot{u} = -7$

2ª fase $10\dot{u}(2)v(0) - 2\dot{u}(0)v(0) = 0 \quad \forall v \in V$
 $2v(0)\{5\dot{u}(2) - \dot{u}(0)\} = 0 \leadsto \dot{u}(2) = \frac{1}{5}\dot{u}(0)$

Condizione necessaria per essere p.to di min.:

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} & \text{ELE} \\ u(2) = 5u(0) & \text{cond. data} \\ \dot{u}(2) = \frac{1}{5}\dot{u}(0) & \text{cond. nota on the road} \end{cases} \quad \begin{aligned} u(x) &= -\frac{7}{4}x^2 + ax + b \\ \dot{u}(x) &= -\frac{7}{2}x + a \end{aligned}$$

$$u(2) = 5u(0) \Leftrightarrow -7 + 2a + b = 5b \quad \text{trovo } b$$

$$5\dot{u}(2) = \dot{u}(0) \Leftrightarrow 5(-7 + a) = a \leadsto \text{trovo } a \quad \nearrow$$

Dal sistema trovo in modo unico a e $b \leadsto$ trovo $u_0(x)$ che è l'unico p.to di minimo come posso verificare di solito modo: $w = u_0 + v$

$$F(w) = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_0^2}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2}_{\text{volendo integro per parti}} + \underbrace{2\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v}}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} - \underbrace{7\int_0^2 u_0}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} - \underbrace{7\int_0^2 v}_{\text{Fatto 0 insieme per ELE}} \geq F(u_0)$$

Fatto 0 insieme per ELE
(volendo integro per parti)

Vale il segno di = se e solo se v è costante, ma poiché $v(2) = 5v(0)$ la costante deve essere nulla.

$$\boxed{3} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^1([0,2]) : u(2) = 5 + u(0)\}$$

$$V = \{v \in C^1([0,2]) : v(2) = v(0)\}$$

Al solito modo

$$2\ddot{u}(2)v(2) - 2\ddot{u}(0)v(0) - 2\int_0^2 \ddot{u}v - 7\int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\underline{1^a \text{ fase}} \rightsquigarrow \ddot{u} = -\frac{7}{2} \quad \underline{2^a \text{ fase}} \rightsquigarrow \text{solgo } v(2) = v(0) \neq 0 \\ \ddot{u}(2) = \ddot{u}(0)$$

Quindi cond. nec. è che

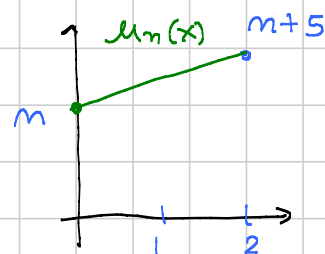
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} \\ u(2) = 5 + u(0) \\ \ddot{u}(2) = \ddot{u}(0) \end{cases} \rightsquigarrow \ddot{u}(x) \text{ è una retta non costante} \\ \rightsquigarrow \text{incompatibile con}$$

Quindi la cond. nec. non è soddisfatta, il che apre a 2 ipotesi
 $\rightarrow$ il min. esiste, ma la loro regolarità non è suff. ad ottenere la cond. necessaria
 $\rightarrow$ il min. non esiste.

$$\boxed{\text{CLAIM}} \quad \inf = -\infty$$

$$\text{Basta prendere } u_m(x) = m + \frac{5}{2}x$$

$$F(u_m) = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 7m - \frac{35}{2}x \rightarrow -\infty$$



$$\boxed{4} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, \dot{u}(2) = \alpha\}$$

Domanda: per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste il minimo?

Idea vista alla lezione 5: la condizione $\dot{u}(0) =$ qualcosa da posso "fregare".

Provo a risolvere con la sola prima condizione

$$\hat{\mathbb{X}} := \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3\}$$

Al solito modo arrivo a
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} \\ u(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{cases} \quad u(x) = -\frac{7}{4}x^2 + ax + b$$

$\leadsto$ trovo a e b in modo unico.

Dati a e b , trovo un'unica funzione $u_0(x)$ che è soluzione del problema in $\hat{\mathbb{X}}$.

$\rightarrow$ Se $\alpha = 0$, allora $u_0(x)$ è anche soluzione del pbm. originario

$\rightarrow$ Se $\alpha \neq 0$, allora il minimo non esiste, il valore minimo è comunque $F(u_0)$, e una succ. minimizzante si ottiene modificando u_0 alla fine in modo da rispettare $\dot{u}(2) = \alpha$.

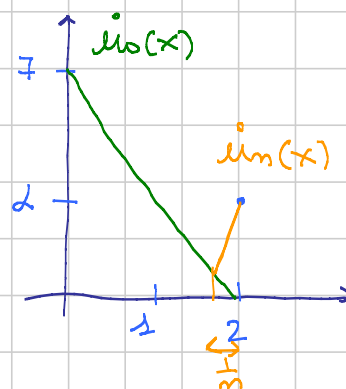
Come si fa la modifica? Calcolo a e b : $b = 3$

$$\dot{u}(2) = 0 \Leftrightarrow -7 + a = 0 \Leftrightarrow a = 7 \leadsto u_0(x) = -\frac{7}{4}x^2 + 7x + 3$$

$$\dot{u}_0(x) = -\frac{7}{2}x + 7$$

Pongo $\dot{u}_m(x)$ come in figura e infine

$$u_m(x) = 3 + \int_0^x \dot{u}_m(t) dt$$



$$\boxed{7} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^1([0,2]) : \int_0^1 u(x) dx = 1 \text{ e } \int_1^2 u(x) dx = 2\}$$

$$V = \{v \in C^1([0,2]) : \int_0^1 v(x) dx = 0 \text{ e } \int_1^2 v(x) dx = 0\}$$

Come al solito

$$2\ddot{u}(2)v(2) - 2\ddot{u}(0)v(0) - 2\int_0^2 \ddot{u} v - 7\int_0^2 v = 0 \quad \forall v \in V$$

1^a fase : scelgo $v \in C_c^\infty((0,2)) \cap V$

$$\int_0^2 (2\ddot{u} + 7) v dx = 0 \quad \forall v \in \text{come sopra}$$

Applico FLCV negli intervalli $(0,1)$ e $(1,2)$

solo nei 2 singoli posso davvero

e ottengo

$$\begin{aligned} 2\ddot{u} + 7 &= c_1 & \forall x \in (0,1) \\ 2\ddot{u} + 7 &= c_2 & \forall x \in (1,2) \end{aligned} \rightsquigarrow \begin{aligned} \ddot{u} &= 2c_1 & \forall x \in (0,1) \\ \ddot{u} &= 2c_2 & \forall x \in (1,2) \end{aligned}$$

2^a fase : $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(2) = 0$. Quindi la cond. necessaria è

$$\ddot{u} = 2c_1 \quad \text{in } (0,1) \rightsquigarrow u_1(x) = c_1 x^2 + a_1 x + b_1 \quad \text{in } [0,1]$$

$$\ddot{u} = 2c_2 \quad \text{in } (1,2) \rightsquigarrow u_2(x) = c_2 x^2 + a_2 x + b_2 \quad \text{in } [1,2]$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

$$\dot{u}(2) = 0$$

$$\int_0^1 u(x) dx = 1$$

$$\int_1^2 u(x) dx = 2$$

Abbiamo ora da determinare 6 costanti $c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2$. Abbiamo a disposizione 2 NBC e 2 integrali + le 2 condizioni occulte che derivano dal ricollegamento C^1 , cioè

$$u_1(1) = u_2(1), \quad \dot{u}_1(1) = \dot{u}_2(1)$$

Conto da fare: il sistema lineare ha soluzione unica e la funzione che si ottiene è davvero un minimo.

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 07

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

$$F(u) = \int_0^\pi (\ddot{u}^2 + \dot{u}^2) dx$$

Calcoliamo ELE in varie forme

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_0^\pi \dot{u}^2 + 2t \int_0^\pi \ddot{u} \ddot{v} + t^2 \int_0^\pi \ddot{v}^2 + \int_0^\pi \dot{u}^2 + 2t \int_0^\pi \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_0^\pi \dot{v}^2$$

$$\delta F(u, v) := \varphi'(0) = 2 \int_0^\pi \ddot{u} \ddot{v} + 2 \int_0^\pi \dot{u} \dot{v}$$

Abbiamo usato che u e v sono C^2 in $[0, \pi]$ 1ª forma integrale di ELE: $\delta F(u, v) = 0$ scritta come sopraOra integriamo per parti in modo da ottenere v pulito

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \dot{u} \dot{v} dx &= \dot{u}(\pi) v(\pi) - \dot{u}(0) v(0) - \int_0^\pi \ddot{u} v dx \\ \int_0^\pi \ddot{u} \ddot{v} dx &= \ddot{u}(\pi) \ddot{v}(\pi) - \ddot{u}(0) \ddot{v}(0) - \int_0^\pi \ddot{\ddot{u}} \ddot{v} dx \\ &= \ddot{u}(\pi) \ddot{v}(\pi) - \ddot{u}(0) \ddot{v}(0) - \ddot{\ddot{u}}(\pi) v(\pi) + \ddot{\ddot{u}}(0) v(0) + \int_0^\pi u^{(4)} v dx \end{aligned}$$

Quindi assumendo maggiore regolarità su u (classe C^4) abbiamo ottenuto che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta F(u, v) &= [\dot{u}(\pi) - \ddot{\ddot{u}}(\pi)] v(\pi) - [\dot{u}(0) - \ddot{\ddot{u}}(0)] v(0) \\ &\quad + \ddot{u}(\pi) \ddot{v}(\pi) - \ddot{u}(0) \ddot{v}(0) \\ &\quad + \int_0^\pi [u^{(4)} - \ddot{\ddot{u}}] v dx \end{aligned}$$

Vogliamo minimizzare $F(u)$ in diverse classi $\times$.

$$\boxed{1} \quad \mathbb{X} := C^2([0, \pi]) \quad \leftarrow \text{sp. vettoriale}$$

Assumiamo tutto regolare

ELE diff.

1^a fase: usando $v \in C_c^\infty((0, \pi)) \rightsquigarrow (FLCV)$

$$u^{(4)} = \ddot{u}$$

2^a fase: usando opportune v che sono nulle al bordo otteniamo 4 BCs

$$\begin{cases} \dot{u}(\pi) = \ddot{u}(\pi) \\ \dot{u}(0) = \ddot{u}(0) \\ \ddot{u}(\pi) = 0 \\ \ddot{u}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Tutte nulle on the road}$$

La soluzione generale di $u^{(4)} = \ddot{u}$ è $(x^4 = x^2 \rightsquigarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=\pm 1 \end{matrix})$

$$u(x) = ae^x + be^{-x} + cx + d$$

(volendo anche $a \cosh x + b \sinh x + cx + d$)

Fare il conto per esercizio ... troviamo che esistono infiniti pti di minimo e sono tutte e sole le funzioni costanti, cosa che si voleva fin dall'inizio.

$$\boxed{2} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^2([0, \pi]) : \dot{u}(0) = 1\} \quad \leftarrow \text{sp. affine}$$

$$V := \{v \in C^2([0, \pi]) : \dot{v}(0) = 0\}$$

Rifacendo i conti, dalla fase 1 troviamo $u^{(4)} = \ddot{u}$

Nella fase 2 nascono on the ROAD le BCs

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}(0) &= \dot{u}(0) \\ \ddot{u}(\pi) &= \dot{u}(\pi) \\ \ddot{u}(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ on the road}$$

$$\dot{u}(0) = 1 \quad \left\{ \text{c'era già all'inizio} \right.$$

Vediamo di impostare il sistema lineare

$$u(x) = a \cos \alpha x + b \sin \alpha x + c x + d$$

$$\dot{u}(x) = -a \sin \alpha x + b \cos \alpha x + c$$

$$\ddot{u}(x) = -a \cos \alpha x - b \sin \alpha x$$

$$\ddot{\bar{u}}(x) = a \sin \alpha + b \cos \alpha$$

$$\ddot{\bar{u}}(0) = \ddot{u}(0) \Leftrightarrow b = b + c \leadsto c = 0$$

$$\ddot{\bar{u}}(\pi) = \ddot{u}(\pi) \text{ ora è automatico}$$

$$\ddot{\bar{u}}(\pi) = 0 \Leftrightarrow a \cos \alpha(\pi) + b \sin \alpha(\pi) = 0$$

$$\dot{\bar{u}}(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$$

$$c = 0, b = 1, a = -\frac{\sin \alpha(\pi)}{\cos \alpha(\pi)} = -\tan \alpha(\pi), d \text{ libero}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono tutte e sole le funzioni del tipo

$$u_0(x) = -\tan \alpha(\pi) \cos \alpha x + \sin \alpha x + d$$

FINO AD ORA NON ABBIAMO RISPOSTO A NULLA.

Dubbi che rimangono

→ le $u_0(x)$ trovate sono p.ti di min?

→ esistono altri p.ti di min? Potrebbero essercene e non essere abbastanza regolari da risolvere il sistema.

Per rispondere, usiamo la solita tecnica. Dato un qualunque $w \in X$, lo scriviamo come

$$w(x) = u_0(x) + v(x) \quad \leftarrow \text{sta in } V$$

↑
una qualunque,
diciamo con $d = 74$

Con i soliti conti arriviamo a

$$F(u) = F(u_0) + \boxed{\int_0^\pi [\ddot{v}^2 + \dot{v}^2] dx} \geq 0$$

$$+ 2 \underbrace{\int_0^\pi [\ddot{u}_0 \dot{v} + \dot{u}_0 \ddot{v}] dx}$$

come si vede integrando per parti
ma che sappiamo che u_0 è regolare
(basta farla una volta)

Quindi le $u_0(x)$ sono p.ti di cui. e vale il segno di
uguale $\Leftrightarrow v \equiv \text{costante}$.

$$[3] \mathbb{X} := \{u \in C^2([0, \pi]) : \ddot{u}(0) = 1\}$$

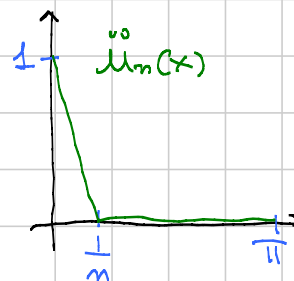
↑ una condizione sulle derivate
secondo è sospetta.

CLAIM: $\inf = 0$ (e a quel p.to min. non esiste)

Basta trovare $\{u_n\} \subseteq \mathbb{X}$ t.c. $F(u_n) \rightarrow 0$

Poniamo $\ddot{u}_n(x)$ come in figura

$$\dot{u}_n(x) := \int_0^x \ddot{u}_n(t) dt \quad (\text{è importante che sia circa 0 su tutto l'intervallo})$$



$$u_n(x) = 47 + \int_0^x \dot{u}_n(t) dt$$

↑
qui scelta libera

Facili conti mostrano che $0 \leq \int_0^\pi \ddot{u}_n(x)^2 dx \leq \frac{1}{n}$

$$|\dot{u}_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [0, \pi] \Rightarrow \int_0^\pi \dot{u}_n(x)^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{☺}$$

$$\boxed{4} \quad \mathbb{X} := \{u \in C^2([0, \pi]) : u(0) = u(\pi), \dot{u}(0) = 2\}$$

$$V := \{v \in C^2([0, \pi]) : v(0) = v(\pi), \dot{v}(0) = 0\}$$

Ragionando come sempre, troviamo $u^{(4)} = \ddot{u}$ in fase 1.
Nella fase 2 consideriamo i termini di bordo

$$[\dot{u}(\pi) - \ddot{u}(\pi)]v(\pi) - [\dot{u}(0) - \ddot{u}(0)]v(0)$$

$$+ \dot{u}(\pi)\dot{v}(\pi) - \cancel{\ddot{u}(0)\dot{v}(0)}$$

Le condizioni finali sono

$$\ddot{u}(\pi) = 0$$

$$\dot{u}(\pi) - \ddot{u}(\pi) = \dot{u}(0) - \ddot{u}(0)$$

$$u(0) = u(\pi)$$

$$\dot{u}(0) = 2$$

} Note on the road

} Data all'inizio

Scritta $u(x) = a \cos R x + b \sin R x + c x + d$, ci aspettiamo di determinare univocamente a, b, c , con d libero.

Le soluzioni trovate sono tutti e soli i p.ti di minimo.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 08

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

Esempio 1 $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u) dx : u(0)=0, u(1)=\alpha \right\}$
 $u \in C^1([0,1])$ ↑ parametro

$$L(x, s, p) := p^4 + s \quad (ELE) \rightsquigarrow (L_p)' = L_s \rightsquigarrow (4\dot{u}^3)' = 1$$

Volendo espandere i conti, verrebbe $12 \dot{u}^2 \ddot{u} = 1$, ma la prima forma è + comoda!

$$(4\dot{u}^3)' = 1 \rightsquigarrow 4\dot{u}^3 = x + c \rightsquigarrow \dot{u}^3 = \frac{x}{4} + c \rightsquigarrow \dot{u} = \sqrt[3]{\frac{x}{4} + c}$$

$$\rightsquigarrow u(x) = \frac{3}{4} \left| \frac{x}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} + d \quad (c \text{ e } d \text{ sono parametri liberi})$$

oss. che $\int \sqrt[3]{s} ds = \frac{3}{4} |s|^{\frac{4}{3}}$

Trovo c e d usando DBC:

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} |c|^{\frac{4}{3}} + d = 0 \rightsquigarrow d = -\frac{3}{4} |c|^{\frac{4}{3}}$$

$$u(1) = \alpha \Leftrightarrow \frac{3}{4} \left| \frac{1}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} |c|^{\frac{4}{3}} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left| \frac{1}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} - |c|^{\frac{4}{3}}}_{\psi(c)} = \frac{4\alpha}{3}$$

Se $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fosse bigettiva, questa cond. det. c univocamente. Osservo che

$$\psi'(c) = \frac{4}{3} \left\{ \sqrt[3]{\frac{1}{4} + c} - \sqrt[3]{c} \right\} > 0 \quad \text{per monotonia della radice cubica}$$

$$\lim_{c \rightarrow \pm\infty} \psi(c) = \lim_{c \rightarrow \pm\infty} |c|^{\frac{4}{3}} \left\{ \left| \frac{1}{4c} + 1 \right|^{\frac{4}{3}} - 1 \right\} = \pm\infty \quad \text{😊}$$

$\sim \left(1 + \frac{1}{4c} + o\left(\frac{1}{c}\right)\right)^{\frac{4}{3}} - 1$

Le DBC determinano una soluzione unica $u_0(x)$.

Sarà punto di min? Ovviamente $w = u_0 + v$

$$\uparrow v(0) = v(1) = 0$$

$$F(w) = F(u_0 + v) = \int_0^1 \{ \underbrace{u_0^4} + \underbrace{4u_0^3 v} + 6u_0^2 v^2 + 4u_0 v^3 + \underbrace{v^4} + \underbrace{u_0 + v} \} dx$$

$$= F(u_0) + \int_0^1 (4u_0^3 v + v) dx = 0$$

$$+ \int_0^1 \underbrace{v^2 (6u_0^2 + 4u_0 v + v^2)}_{\geq 0} dx \geq F(u_0)$$

$$\int_0^1 4u_0^3 v dx = \left[4u_0^3 v \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \underbrace{(4u_0^3)'}_1 v dx$$

" perché $v(0) = v(1) = 0$ 1 per (ELE)

Per il segno del secondo basta osservare che $6A^2 + 4AB + B^2$ è una forma quadratica def. positiva.

Vale il segno di $=$ se e solo se $\dot{v} \equiv 0 \Leftrightarrow v = \text{costante}$, ma la costante è nulla perché $v(0) = v(1) = 0$.

Quindi $u_0(x)$ è l'unico p.to di min di $F(u)$ in $C^1([0,1])$ con le DBC assegnate.

Studiamo la regolarità di $u_0(x)$

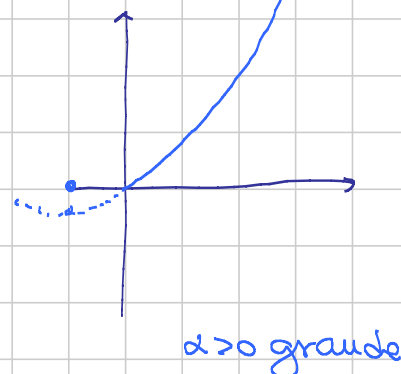
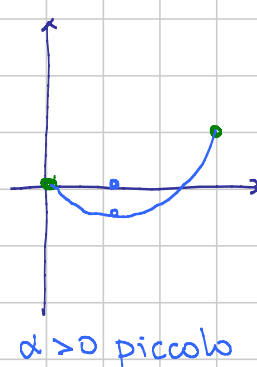
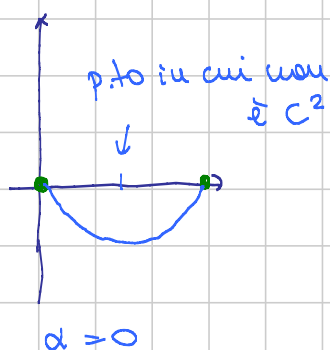
Osserviamo che $u_0(x) = \frac{3}{4} \left\{ \left| \frac{x}{4} + c \right|^{\frac{4}{3}} - |c|^{\frac{4}{3}} \right\}$ è di classe C^1 in $\mathbb{R}$ e di classe C^∞ dove non si annulla l'argomento, cioè per $x \neq -4c$. Ci sono quindi due casi

- Se $0 \leq -4c \leq 1$, allora la soluzione è C^2 , ma non C^1
- Se $-4c < 0$ oppure $-4c > 1$, allora la soluzione è C^∞ .

I casi borderline sono $c=0$ e $c=-\frac{1}{4}$, che corrispondono a

$$a) \quad \left| \frac{1}{4} \right|^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \alpha \quad (c=0) \quad \quad - \left| \frac{1}{4} \right|^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \alpha$$

Quindi, ci sono due valori critici di α (simmetrici rispetto a 0) tali che per valori interni la soluz. è C^1 , ma non C^2 , e per valori esterni è C^∞ .



Stessa cosa per gli $\alpha < 0$.

Oss. importante

La (ELE) nella forma $(4\dot{u}^3)' = 1$ vale sempre, anche nei pti in cui la soluz. è C^1 . Invece nella forma $12\dot{u}^2\ddot{u} = 1$ avrebbe dei problemi (superabili) nel caso in cui siamo nel pto di minimo.

Se vogliamo essere più precisi, la soluzione è sempre $C^{1,1/3}$, cioè $\dot{u}$ è $\frac{1}{3}$ -Hölder.

Infatti, la (ELE) nella forma $(4\dot{u}^3)' = 1$ ci dice che $\dot{u}^3$ è C^1 , quindi Lip. Inoltre è continua. Le funzioni continue il cui cubo è Lip. sono $\frac{1}{3}$ -Hölder (vedi Analisi 1).

Chi è il colpevole di questa perdita di regolarità della soluzione?

In questo caso è il fatto che L_{pp} si annulla, cioè p^4 è strett. convessa, ma la sua derivata seconda può annullarsi.

Oss di convessità la lagrangiana $L(x, s, p) = s + p^4$ è convessa nella coppia (s, p) ed è strettamente convessa in p .
Ne segue che

$$L(s_1 + s_2, p_1 + p_2) \geq L(s_1, p_1) + L_s(s_1, p_1)s_2 + L_p(s_1, p_1)p_2$$

↑
disug. di convessità di Analisi 2
(grafico sta sopra il piano tangente)

con disuguaglianza stretta se $p_2 \neq 0$.

Applicandola con $s_1 = u_0(x)$, $s_2 = v(x)$, $p_1 = \dot{u}_0(x)$, $p_2 = \dot{v}(x)$ otteniamo

[Aggiunto dopo video]

$$(\dot{u}_0(x) + \dot{v}(x))^4 + u_0(x) + v(x) \geq \dot{u}_0(x)^4 + u_0(x) + v(x) + 4\dot{u}_0(x)^3 \dot{v}(x)$$

Integrando in $[0, 1]$ si ottiene $F(w) \geq F(u_0)$.

Infine se $\dot{v}(x) \neq 0$ in un pto, dunque in tutto un intorno, allora $F(w) > F(u_0)$.

Usando la convessità abbiamo dimostrato nuovamente che $u_0(x)$ è unico pto di min.

Esempio 2 $\inf \left\{ \underbrace{\int_{-1}^1 [\dot{u}^2 + (u-x)^2] dx}_{F(u)} : u \in C^1([-1, 1]), u(0) = \alpha \right\}$

Non è un estremo

Idea: lavoriamo separatamente in $[-1, 0]$ e in $[0, 1]$

$$(L_p)' = L_s \Leftrightarrow (2\dot{u})' = 2(u-x) \Leftrightarrow \ddot{u} = u - x$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u - x & \text{in } [-1, 0] \\ \dot{u}(-1) = 0 \\ u(0) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{u} = u - x & \text{in } [0, 1] \\ \dot{u}(1) = 0 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

(ELE) si risolve banalmente: $u(x) = a \cos x + b \sin x + x$

La speranza è che le due soluzioni si ricolleghino in modo C^1 in $x=0$.

→ Se succede, l'inf. è un minimo ed abbiamo il p.to di min.

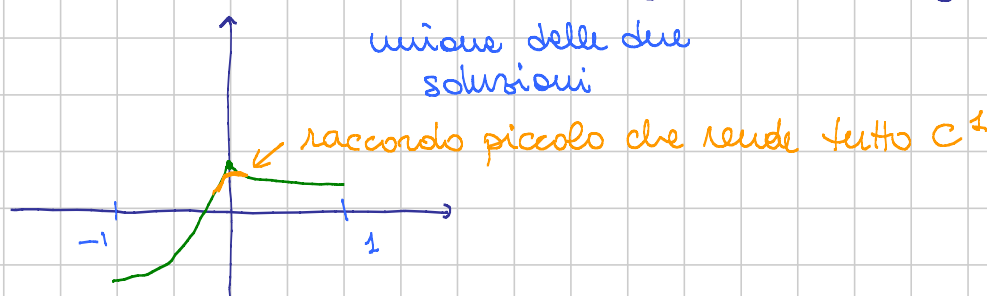
→ Se non succede, l'inf. non è raggiunto ed è = al valore ottenuto "ricollando" i due pezzi

Imponiamo le due NBC: $\tilde{u}(x) = a \sin x + b \cos x + x$

$$\begin{aligned} a \sin(1) + b \cos(1) &= -1 & \text{Det} \neq 0 \leadsto \text{il sistema ha} \\ -a \sin(1) + b \cos(1) &= 1 & \text{soluzione } a_0 \text{ e } b_0 \end{aligned}$$

A questo punto il valore buono di a è b , che dal sistema è 0

Quando non c'è ricollemento, l'inf. si raggiunge con una successione "infizzante" che regolarizza l'angolo



Fatto generale (si dimostra con soliti argomenti di approssimazione)

Se $L(x, s, p)$ è continua nelle 3 variabili, allora

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \int_a^b L(x, u, u') : u \in C^1([a, b]) + \text{DBC} \right\} \\ = \inf \left\{ \int_a^b L(x, u, u') : \begin{array}{l} u \in C^1 \text{ a tratti} \\ u \in C^0 \end{array} + \text{DBC} \right\} \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{aligned}$$

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 09

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

Spazi di Hilbert

Disuguaglianza di BESSEL

Sia H uno spazio di Hilbert, e siano $e_1, \dots, e_n$ vettori ortonormali ($\langle e_i, e_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\langle e_i, e_i \rangle = 1$).

Allora

$$\forall v \in H \quad \|v\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2$$

Dim Definiamo r_n in maniera t.c.

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_n \rangle e_n + r_n$$

↙ resto

Dico che $\langle r_n, e_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Infatti, se faccio il prodotto scalare di LHS e RHS con un certo e_i trovo

$$\begin{aligned} \langle v, e_i \rangle &= \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle + \langle r_n, e_i \rangle \\ &= \langle v, e_i \rangle + \langle r_n, e_i \rangle \quad \leadsto \quad \langle r_n, e_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Facendo la norma di LHS e RHS troviamo

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2 + r_n^2 + \underbrace{\text{tutti i possibili doppi prodotti}}_{\text{tutti nulli}} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle^2 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Oss. Il termine $\sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$ è la proiezione di v su s.spazio generato dagli e_i , mentre r_n è la componente ortogonale.

Teorema Ogni spazio di Hilbert H (anche non separabile) ammette una base Hilbertiana $\{e_i\}_{i \in I}$ (con insieme di indici I magari non numerabile).

Oss. Lo spazio H è separabile se e solo se I è finito o numerabile.

Def. L'insieme $\{e_i\}_{i \in I}$ è una base Hilbertiana se sono vettori ortonormali e il loro span (comb. lin. FINITE) è denso.

Oss. Nel caso separabile la dimostrazione è "costruttiva" (vedi corso 2018/19 o corso 2019/20).

Dim. (non costruttiva) Consideriamo l'insieme Ort di tutti i sottoinsiemi ortonormali di H .

Allora Ort è naturalmente ordinato per inclusione e non vuoto se $H \neq \{0\}$ (ad esempio ci sono i singoli vettori di norma 1). L'ordinamento è PARZIALE.

Ogni catena contenuta in Ort (cioè ogni sottoinsieme di Ort totalmente ordinato) ammette un maggiorante (cioè un elemento, magari non della catena, che è $\geq$ di ogni elemento della catena). Questo è vero perché basta prendere l'unione di tutti gli elementi della catena e osservare che è ancora un sistema ortonormale.

ZORN $\Rightarrow$ esiste un elemento massimale, cioè un sistema ortonormale $\{e_i\}_{i \in I}$ che non è contenuto propriamente in nessun altro sistema ortonormale.

CLAIM: questo elemento massimale ha Span denso.

Supponiamo per assurdo che non sia vero, quindi esiste

$$v \in H \setminus \text{Clos}(\text{Span}(\{e_i\}_{i \in I})).$$

Vorrei togliere a v la sua componente lungo lo span e ottenere un nuovo vettore da aggiungere agli $\{e_i\}_{i \in I}$ per ottenere un sistema ortonormale più grande. L'idea è quindi di porre

$$w := v - \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$$

e poi dividere per la norma.

Problema: I potrebbe essere un numero numerabile. Che vuol dire fare la serie?

Step 1 Per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$\{i \in I : |\langle v, e_i \rangle| \geq \varepsilon\}$$

è finito. Supponiamo che così non sia. Allora esistono $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ per cui $|\langle v, e_{i_k} \rangle| \geq \varepsilon$. Da Bessel

troviamo

$$\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^n \langle v, e_{i_k} \rangle^2 \geq n \varepsilon^2$$

applicata a
 $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\}$

e questa non può essere vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Step 2 L'insieme $\{i \in I : \langle v, e_i \rangle \neq 0\}$ è al più numerabile. Infatti è l'unione

$$\bigcup_{n \geq 1} \{i \in I : |\langle v, e_i \rangle| \geq \frac{1}{n}\}$$

e questi sono tutti finiti.

↑ qualunque cosa che
vada a 0.

Step 3 Quando si scrive $\sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$ si tratta quindi di

una serie (insieme di indici numerabile o finito). Tale serie converge per il criterio di convergenza delle serie Hilbertiane. Infatti, se $\{i_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sono gli indici dei termini diversi da 0, vale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle^2 \leq \|v\|^2$$

↑
vero per tutte le somme parziali
grazie a Bessel.

Quindi $\sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$ converge ed è un elemento della chiusura dello Span degli e_i .

Step 4 Ne segue che $w \neq 0$ ed è facile vedere che $\langle w, e_i \rangle = 0$ per ogni $i \in I$ (basta fare il prodotto scalare al RHS e al LHS).

A questo punto $\{e_i\}_{i \in I} \cup \left\{ \frac{w}{\|w\|} \right\}$ è un sistema ortonormale più grande. Assumo.

— o — o —

Le proprietà della base Hilbertiana generale sono le stesse di quella numerabile. In particolare, ogni v si scrive come

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i$$

↑ si intende che questo è $\neq 0$
al più per un insieme numerabile
di indici.

e valgono le classiche rappresentazioni di norma e prodotto scalare:

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle^2, \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle \langle w, e_i \rangle$$

— o — o —

Completamento di uno spazio di pre-Hilbert, cioè di uno spazio vettoriale H su cui è definito un prodotto scalare definito positivo (non è detto che H sia completo).

Dato un tale H , consideriamo il suo completamento $\hat{H}$ come spazio metrico.

CLAIM: metrica in $\hat{H}$ deriva da una norma, la quale a sua volta deriva da un prodotto scalare, che è l'estensione di quello su H .

Achtung! Ripassare la definizione e costruzione del completamento di uno sp. metrico (vedi lec. Analisi 2 per matematica).

L'unico dettaglio è definire il prodotto scalare.

Pensiamo v e w in $\hat{H}$. Per definizione, questi sono classi di equivalenza di succ. di Cauchy in H .

Scriviamo, con abuso di notazione,

$$v_n \rightarrow v$$

$$w_n \rightarrow w$$

Come definiamo $\langle v, w \rangle_{\hat{H}}$? Come il limite di $\langle v_n, w_n \rangle_H$.

Serve quindi che $\{\langle v_n, w_n \rangle_H\}$ sia di Cauchy in $\mathbb{R}$, il che segue dalla solita stima

$$|\langle v_n, w_n \rangle - \langle v_m, w_m \rangle| = |\langle v_n, w_n \rangle - \langle v_n, w_m \rangle + \langle v_n, w_m \rangle - \langle v_m, w_m \rangle|$$

$$\leq \underbrace{\|v_n\|}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\|w_n - w_m\|}_{\text{piccoli se } n \text{ ed } m \text{ sono grandi}} + \underbrace{\|w_m\|}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\|v_n - v_m\|}_{\text{piccoli se } n \text{ ed } m \text{ sono grandi}}$$

racc. + C.S. (le succ. di Cauchy sono limitate)

Importante: bisogna accertarsi che la definizione sia ben posta, cioè se

$$\tilde{v}_n \rightarrow v$$

$$\tilde{w}_n \rightarrow w$$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \tilde{v}_n, \tilde{w}_n \rangle_H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle v_n, w_n \rangle_H.$

Questo segue ad esempio dal fatto che la succ.

$$v_1, \tilde{v}_1, v_2, \tilde{v}_2, \dots$$

converge ancora a v , e idem per quella con w .

Il resto delle verifiche (bilinearità e positività) sono lasciate per esercizio.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 10

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

02/10/2020

Esercizio 1 Dimostrare che le successioni

$$\{n e_n\}$$

$$\{\sqrt{n} e_n\}$$

$$\{\log n \cdot e_n\}$$

non sono debolmente convergenti (e non hanno nemmeno s.succ. debolmente convergenti).

[Si intende che H è uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, e $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base Hilbertiana (una sistema ortonormale dovrebbe bastare comunque)].

Oss. Un giorno (terza parte del corso) tutto questo sarà banale perché un teo. dirà "deb. conv. $\Rightarrow$ limitata".

RisolviAMO ora "a mano". Detta $\{v_n\}$ la successione, in tutti e 3 i casi si verifica banalmente che

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \langle v_n, e_i \rangle \rightarrow 0 \quad (\text{è } \equiv 0 \text{ appena } n > i)$$

Quindi un fantomatico limite v_∞ dovrebbe soddisfare $\langle v_\infty, e_i \rangle = 0$ per ogni i , quindi $v_\infty = 0$. Pertanto dovrebbe essere che

$$\langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle = 0 \quad \forall w \in H$$

Quindi negare la conv. debole (anche per s.succ.) equivale a trovare $w \in H$ per cui questo non accade (nemmeno per s.succ.)

Nel 1° caso basta prendere

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{i}$$

(converge perché $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < +\infty$)

e osservare che $\langle w, e_n \rangle = \langle ne_n, \frac{1}{n} e_n \rangle = 1$ per ogni n

Nel secondo caso vorrei porre $w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{\sqrt{i}}$, ma non posso

perché $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$ e quindi la serie NON CONVERGE.

Per uscire, occorre fare una serie + sparsa e porre

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{i^2}}{\sqrt{i^2}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{i^2}}{i}$$

Questa converge !! Inoltre

$$\langle w, e_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ non è quadrato perfetto} \\ 1 & \text{se } n = i^2 \text{ per un certo } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ne segue che $\langle w, e_n \rangle \not\rightarrow 0$ perché la s.succ. sui quadrati perfetti tende ad 1. Questo nega la conv. debole di tutta la successione.

(Variante interessante: come si nega la conv. debole di una s.succ. ?)

Per la terza opzione occorre una definizione ancora più sparsa

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_{2^i}}{i} \quad \leftarrow \text{ l'indice è } 2^i$$

Esercizio 2 Sia H sp. di Hilbert separabile con base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Consideriamo

$$[0, 1]^{\infty} := \{v \in H : 0 \leq \langle v, e_n \rangle \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

È fortemente chiuso / compatto ?

È debolmente " " ?

Risposta: è debolmente chiuso, quindi anche fortemente chiuso

$$\text{Se } u_m \rightarrow u_\infty, \text{ allora } \begin{matrix} \langle u_m, e_i \rangle \\ [0, 1] \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \langle u_\infty, e_i \rangle \\ \in [0, 1] \end{matrix} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Non è deb. compatto, quindi nemmeno fortemente compatto.
Infatti, se poniamo

$$u_m := \sum_{i=1}^m e_i$$

Si verifica che $u_m \in [0, 1]^\infty$, e $\|u_m\|^2 = m$, quindi non è limitata. Questo implica che non ci sono s.succ. fortem. conv. (e nemmeno debolmente, se si dà per buono il teo. misterioso).

Riusciamo a farlo costruendo w a mano.

Proviamo con

$$w := \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \quad \text{con } \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$$

Allora

$$\langle w, u_m \rangle = \sum_{i=1}^m a_i \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Basta quindi scegliere a_i in maniera tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty \quad \text{ma} \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i = +\infty$$

ad esempio $a_i = \frac{1}{i}$ 😊

Esercizio 3 Stessa cosa con

$$C = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}] \times \dots$$

$$:= \{v \in H : 0 \leq \langle v, e_n \rangle \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1\}$$

C è chiuso debolmente e fortemente (come prima)

C è compatto debolmente. Infatti se $u \in C$, allora

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \text{cost.}$$

Quindi, se $\{u_m\} \subseteq C$, allora $\{u_m\} \subseteq \text{palla}$, ma allora esiste $u_{\infty} \in \text{palla}$ t.c. $u_{m_k} \rightarrow u_{\infty}$.

Ma essendo C debolmente chiuso, allora $u_{\infty} \in C$.

C è compatto fortemente !!! Basta dimostrare questo :
se $\{u_m\} \subseteq C$ è $u_m \rightarrow u_{\infty}$, allora $u_m \rightarrow u_{\infty}$.

Come al solito scriviamo

$$u_m = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle e_i$$

$$u_{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_{\infty}, e_i \rangle e_i$$

Claim fondamentale: le code sono UNIFORMEMENTE piccole, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} \sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle^2 \leq \varepsilon$$

code

e la stessa cosa vale per u_{∞} . Motivo

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle^2 \leq \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ u_m \in C \end{matrix} \quad (\text{code di una serie convergente})$$

Questo lo dimostra per i u_m , mentre per u_{∞} segue osservando che $u_{\infty} \in C$ allo stesso modo.

Dal claim fondamentale segue la tesi. Infatti

$$\begin{aligned}\|u_m - u_\infty\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u_m - u_\infty, e_i \rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \langle u_m - u_\infty, e_i \rangle^2 + \sum_{i=M+1}^{+\infty} \dots\end{aligned}$$

Ora

$$\langle u_m - u_\infty, e_i \rangle^2 = (\langle u_m, e_i \rangle - \langle u_\infty, e_i \rangle)^2$$

$$\leq 2 \langle u_m, e_i \rangle^2 + 2 \langle u_\infty, e_i \rangle^2$$

$$\begin{aligned}\text{da cui } \sum_{i=M+1}^{+\infty} \langle u_m - u_\infty, e_i \rangle^2 &\leq 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_m, e_i \rangle^2 + 2 \sum_{i=M+1}^{\infty} \langle u_\infty, e_i \rangle^2 \\ &\leq 4\varepsilon\end{aligned}$$

e quindi

$$\|u_m - u_\infty\|^2 \leq \sum_{i=1}^M \underbrace{\langle u_m - u_\infty, e_i \rangle^2}_\downarrow + 4\varepsilon$$

↓
0 per $m \rightarrow +\infty$ e solo un numero finito

Ne segue che

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \|u_m - u_\infty\|^2 \leq 4\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

da cui la tesi.

— o — o —

Variaute Provare a studiare lo stesso problema con

$$C = [0, 1] \times [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, \frac{1}{\sqrt{3}}] \times \dots$$

Esercizio 4 Consideriamo la sfera

$$S = \{v \in H : \|v\| = 1\}$$

Non è debolmente chiusa (ma fortemente sì). Determinare la sua chiusura debole, cioè $\bar{S}$ insieme

$$\text{ClosWeak}(S) = \{v \in H : \exists \{v_m\} \subseteq S \text{ t.c. } v_m \rightharpoonup v\}$$

CLAIM Si tratta di tutta la palla $\{v \in H : \|v\| \leq 1\}$.

Dato $v \in H$ con $\|v\| \leq 1$, voglio trovare $\{v_m\} \subseteq S$ t.c. $v_m \rightharpoonup v$.

Se $\|v\| = 1$, non è molto difficile $\because (v_m \equiv v)$

Se $\|v\| < 1$, cerco v_m del tipo $v_m = v + \alpha_m e_n$, sperando poi che per seconda parte tenda debolmente a 0 (il che accade se $\{\alpha_m\}$ è limitato). Cui deve essere α_n ?

$$1 = \|v_m\|^2 = \|v\|^2 + \alpha_m^2 + 2\alpha_m \langle v, e_n \rangle \quad (*)$$

Questa è una eq. di 2° grado in α_n , che ha come soluzione

$$\alpha_n = \langle v, e_n \rangle \pm \sqrt{\langle v, e_n \rangle^2 - 4(\|v\|^2 - 1)}$$

Devo sperare che $\langle v, e_n \rangle^2 \geq 4(\|v\|^2 - 1)$, il che è vero perché è positivo $\geq$ negativo.

Resta da dimostrare che α_n è limitato, il che sembra davvero ragionevole perché altrimenti il termine α_n^2 manda a uanità il RHS di (*) all'infinito.

[Qualche dettaglio nel video].

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 11

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Dimostrazione a mano della completezza spazi ℓ^p o $L^p(I)$

Def. Sia I un insieme di indici (anche più che numerabile).
Indichiamo con $L^p(I)$ (dove $p \geq 1$ è un numero reale)
l'insieme delle funzioni $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che l'insieme
 $\{i \in I : f(i) \neq 0\}$ è al più numerabile e

$$\sum_{i \in I} |f(i)|^p < +\infty$$

(si intende che la somma si fa solo sugli $i \in I$ per cui $f(i) \neq 0$)

Si verifica facilmente che

$$\|f\|_{L^p(I)} := \left\{ \sum_{i \in I} |f(i)|^p \right\}^{1/p}$$

è una norma su questo spazio.

Teorema Per ogni $p \geq 1$ e per ogni insieme I , lo spazio $L^p(I)$
è completo rispetto alla distanza indotta dalla norma.

Oss. Quando $I = \mathbb{N}$ lo spazio si indica con ℓ^p .

In ogni caso si tratta dello spazio L^p rispetto alla misura che conta i punti in I (cioè $\text{meas}(A) = \text{numero el. di } A$ per ogni $A \subseteq I$).

Dim (senza passare per la teoria generale degli spazi L^p
rispetto ad una misura)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(I)$ una succ. di Cauchy. Devo dimostrare
che $f_n \rightarrow f_\infty$ rispetto alla norma di $L^p(I)$.

Step 1 (Identificazione di un limite puntuale)

Esiste $f_\infty: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n(i) \rightarrow f_\infty(i)$ per ogni $i \in I$.
 Per definire $f_\infty(i)$ basta dimostrare che $\{f_n(i)\} \subset \mathbb{R}$ è una succ. di Cauchy per ogni indice $i \in I$.
 Questo segue da

$$\begin{aligned} |f_m(i) - f_n(i)| &= \left\{ |f_m(i) - f_n(i)|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \left\{ \sum_{i \in I} |f_m(i) - f_n(i)|^p \right\}^{1/p} \quad (\text{su cosa sto davvero sommando?}) \\ &= \|f_m - f_n\|_{L^p(I)} \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. RHS $\leq \varepsilon$ per ogni $m \geq n_0, n \geq n_0$.
 La stessa cosa vale quindi per il LHS.

Step 2 Dimostriamo che $f_\infty \in L^p(I)$.

Osserviamo intanto che gli indici $i \in I$ tali che $f_\infty(i) \neq 0$ sono una quantità numerabile (sono contenuti nell'unione degli indici per cui le f_n sono $\neq 0$, e unione numerabile di numerabili è numerabile). Adesso indichiamo con

$$I_\infty := \{i \in I : f_\infty(i) \neq 0\}.$$

Per ogni sottoinsieme FINITO $J \subset I_\infty$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} |f_\infty(i)|^p &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J} |f_n(i)|^p \\ &\quad \uparrow \text{limite di somma FINITA} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} |f_n(i)|^p \quad \leftarrow \text{Tutti gli indici} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^p(I)}^p \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{limitate (succ. di Cauchy sono limitate per fatto generale metrico)}} \end{aligned}$$

Tutte le somme parziali sono EQUIDIVISE (indip. da J), quindi la serie converge.

Quindi finora

$$f_n \rightarrow f_\infty \in L^p(I) \quad \text{PUNTUALMENTE}$$

Step 3 (Stima uniforme sulle code)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \subseteq I \text{ FINITO} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{i \in I \setminus J} |f_m(i)|^p \leq \varepsilon$$

Dato $\varepsilon > 0$, prendiamo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m \geq m_0 \quad \forall n \geq m_0 \quad \|f_n - f_m\|_{L^p(I)}^p \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

(esiste perché $\{f_n\}$ è di Cauchy)

Per ogni $n = 1, \dots, m_0$ esiste J_n t.c.

$$\sum_{i \in I \setminus J_n} |f_n(i)|^p \leq \frac{1}{2^p} \varepsilon$$

Considero $J := \bigcup_{n=1}^{m_0} J_n$, e dico che questo va bene.

Infatti, se $n \leq m_0$ siamo a posto perché

$$\sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i)|^p \leq \sum_{i \in I \setminus J_n} |f_n(i)|^p \leq \frac{1}{2^p} \varepsilon \leq \varepsilon$$

ho tolto + involci a sx

Se $n \geq m_0$, allora

$$\sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i)|^p = \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i) - f_{m_0}(i) + f_{m_0}(i)|^p$$

$$\begin{aligned} (a+b)^p &\leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \\ \forall a \geq 0 \quad \forall b \geq 0 \end{aligned} \leq 2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i) - f_{m_0}(i)|^p + 2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_{m_0}(i)|^p$$

$$\leq \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_{n_0}(i)|^p}_{2^{p-1} \|f_n - f_{n_0}\|_{L^p(I)}^p \leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_{n_0}(i)|^p}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon,$$

come richiesto

Step 4 (Anche f_∞ ha le code ugualmente piccole)

$\forall \varepsilon > 0 \exists J \subseteq I \neq \text{INFINITO}$ (lo stesso di sopra) tale che

$$\sum_{i \in I \setminus J} |f_\infty(i)|^p \leq \varepsilon$$

Per dimostrarlo, basta rifare lo step 2. Per ogni sottoinsieme FINITO $K \subseteq I \setminus J$ vale

$$\sum_{i \in K} |f_\infty(i)|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in K} |f_n(i)|^p \leq \varepsilon \quad \text{indip. da } K.$$

Step 5 Mostriamo che davvero c'è convergenza in $L^p(I)$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo il J corrispondente dello Step 3 e dello Step 4. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p &= \underbrace{\sum_{i \in J} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p}_{\text{ricupio}} + \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p \\ &\leq \underbrace{\sum_{i \in J} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p}_{\downarrow \text{(somma FINITA)} \rightarrow 0} + \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i)|^p}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_\infty(i)|^p}_{\leq \varepsilon} \end{aligned}$$

Ma allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p \leq 2 \cdot 2^{p-1} \cdot \varepsilon$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo la tesi

— o — o —

Achtung! Il p.to fondamentale è avere le code uniformem. piccole.

Occhio a non cadere nella grande tentazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p = \sum_{i \in I} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p}_{=0} = 0$$

(NON SI SCAMBIANO LIMITI E SERIE INFINITE).

— o — o —

Oss. Nel caso in cui $p=2$ e $I = \mathbb{R}$ (o qualunque cosa più che numerabile), abbiamo un esempio di spazio di Hilbert che non ammette una base Hilbertiana numerabile.

In questo caso una base Hilbertiana sono le funzioni $\{f_i\}_{i \in I}$ definite da

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=i \\ 0 & \text{se } x \neq i \end{cases}$$

È banale verificare che sono ortonormali e che hanno Span denso.

Domanda Potrebbe esistere un'altra base (ovviamente diversa) ma numerabile?

Certamente NO Se uno spazio ha base Hilbertiana numerabile, allora è separabile, e questo non dovrebbe esserlo.

Si può fare con le mani: se $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ fosse una base numerabile, allora l'insieme degli indici in cui almeno un elemento è $\neq 0$ sarebbe numerabile.

Di conseguenza tutti gli elementi dello spazio, scrivendosi come serie delle f_n , sarebbero nulli o di fuori di uno stesso insieme numerabile di indici, il che ovviamente non è vero.

Quindi una base Hilbertiana numerabile non esiste, e lo spazio non può essere separabile.

Anche quest'ultimo fatto si può dim. direttamente (se esistesse un denso $\{f_n\}$ numerabile, allora sarebbe $\neq 0$ solo ...).

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 12

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Sia H uno sp. di Hilbert, e siano V e W due s.sp. vet. chiusi con $V \cap W = \{0\}$.

Possiamo concludere che $V \oplus W$ è un s.sp. chiuso?

Risposta 1 Se V e W sono ortogonali, allora la risposta è Sì.
Quindi assumiamo $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $v \in V$, per ogni $w \in W$.

Cosa dobbiamo dimostrare? Siano $\{v_m\} \subseteq V$ e $\{w_m\} \subseteq W$.

Supponiamo che $v_m + w_m \rightarrow z_\infty \in H$.

Possiamo concludere che $z_\infty \in V \oplus W$?

Idea: ci piacerebbe tanto che $v_m \rightarrow v_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$. A quel p.to avremmo $v_\infty \in V$ e $w_\infty \in W$ per chiusura e quindi $z_\infty = v_\infty + w_\infty \in V \oplus W$.

Tutto quindi si riduce a dimostrare che $\{v_m\}$ e $\{w_m\}$ hanno limite in H , quindi che sono di Cauchy.

Questo segue dalla stima

$$\|v_m - v_n\|^2 + \|w_m - w_n\|^2 = \|(v_m + w_m) - (v_n + w_n)\|^2$$

↑ qui uso somma diretta ortogonale

Essendo $\{v_m + w_m\}$ di Cauchy in H , se ne deduce che pure $\{v_m\}$ e $\{w_m\}$ lo sono.

Domanda: cosa succede se H è soltanto pre-Hilbert?
(Non possiamo usare le succ. di Cauchy)

Risposta 2 Se V e W sono "abbastanza ortogonali", allora ancora SI.

Diciamo che sono abb. ortog. se esiste $\nu < 1$ tale che

$$|\langle v, w \rangle| \leq \nu \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v \in V, \forall w \in W$$

(è una specie di CS penalizzata: geometricamente $\frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|}$ è il coseno dell'angolo compreso tra v e w , e tale angolo si mantiene lontano da 0° e 180°)

Guardando bene la dim. prec., il p.to essenziale era ottenere qualcosa del tipo

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v+w\|^2$$

(questa si usava con $v = v_m - v_{m-1}$, $w = w_m - w_{m-1}$)

In realtà sarebbe bastato

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 \leq M \|v+w\|^2 \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

per una opportuna costante M . Non è che è vero in questo caso?

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 \leq M \|v+w\|^2 \Leftrightarrow \|v\|^2 + \|w\|^2 \leq M (\|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(M-1)\|v\|^2 + (M-1)\|w\|^2 + 2M\langle v, w \rangle}_{\text{LHS}} \geq 0$$

Ora sappiamo che

$$2M\langle v, w \rangle \geq -2M|\langle v, w \rangle| \geq -2M\nu\|v\| \cdot \|w\|$$

e quindi

$$\text{LHS} \geq (M-1)^2\|v\|^2 + (M-1)\|w\|^2 - 2M\nu\|v\| \cdot \|w\| \stackrel{?}{\geq} 0$$

L'ultima disug. è vera se la forma quadratica di matrice

$$\begin{pmatrix} M-1 & -Mv \\ -Mv & M-1 \end{pmatrix} \text{ è definita positiva, il che accade se e solo se } M > 1 \text{ e } (M-1)^2 - M^2 v^2 > 0$$

$$M^2 - 2M + 1 - M^2 v^2 > 0$$

$$(1-v^2) M^2 - 2M + 1 > 0$$

Essendo $|v| < 1$, per M abbastanza grande questa è verificata! Questo basta per concludere.

Risposta 3 Nel caso generale è FALSO (in dim. infinita)

Esempio: prendiamo il solito H separabile con base Hilbertiana $\{e_n\}$

Poniamo $V := \text{Clos}(\text{Span}(e_0, e_2, e_4, e_6, \dots))$

$$W := \text{Clos}(\text{Span}(e_0 + e_1, e_2 + \frac{e_3}{3}, e_4 + \frac{e_5}{5}, e_6 + \frac{e_7}{7}, \dots))$$

[Verificare per allenamento che non sono abbastanza ortogonali]

Dico che gli elementi di V sono tutti e soli quelli del tipo

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{2i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < +\infty$$

e analogamente gli elementi di W sono quelli del tipo

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(e_{2i} + \frac{e_{2i+1}}{2i+1} \right) \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 < +\infty.$$

Voglio trovare $v_n + w_n \rightarrow z_\infty \in H$, ma $\notin V \oplus W$.

Chi è $\text{Clos}(V \oplus W)$? È tutto H ! Basta osservare che $e_i \in V \oplus W$ per i pari, ma anche per i dispari!

Quindi

$$z_\infty := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_{2i+1}}{2^{i+1}} \in H = \text{Clos}(V \oplus W).$$

Verifichiamo che $z_\infty \notin V \oplus W$.

Idea: l'unico modo di scriverlo è usare tutti gli elementi della base di W con coeff. 1, e questo è un grosso problema!!

$$\text{Se } z_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e_{2i+1}}{2^{i+1}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a_i e_{2i}}_{\in V} + \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(e_{2i} + \frac{e_{2i+1}}{2^{i+1}} \right)}_{\in W}$$

Facendo il prodotto scalare con un generico e_{2k+1} troviamo

$$\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{b_{2k+1}}{2^{k+1}}, \text{ da cui } b_{2k+1} = 1$$

[Verificare per bene come si scrivano gli elementi di W].

Esempi di convergenza debole

Esempio 1 Prendiamo $\{\sin(mx)\} \subseteq L^2((0,1))$.

Dico che $\sin(mx) \rightarrow 0$.

Dovrei dimostrare che $\int_0^1 \sin(mx) g(x) dx \rightarrow 0$
per ogni $g \in L^2((0,1))$.

Con un facile conto verifico che $\|\sin(mx)\|_{L^2((0,1))}$ sono equilimitate.

Quindi basta fare la verifica per ogni $g \in W$, dove $W \subseteq L^2((0,1))$ è un sottoinsieme che spazza un denso.

Scelgo bene W , ad esempio le funzioni caratteristiche di intervalli (le step functions sono dense in $L^2((0,1))$).

Per ogni $(a,b) \subseteq (0,1)$ vale

$$\int_0^1 \sin(mx) \mathbb{1}_{(a,b)}(x) dx = \int_a^b \sin(mx) dx = \left(\frac{1}{m} \right) [\cos(mx)]_{x=a}^{x=b}$$

↑ $\sin(a,b)$ e 0 fuori

Esempio 2 Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica (e continua, così stiamo tranquilli).

Calcolare il limite debole (se esiste) di

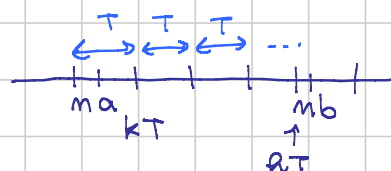
$$f_n(x) := \varphi(nx) \quad \forall x \in (0,1)$$

Brutalmente: $f_n(x)$ oscilla come $\varphi(x)$, ma molto più furiosamente. L'idea è che in media sia uguale a

$$\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(s) ds = \text{media di } \varphi(x) \text{ su un periodo } [0, T]$$

Esattamente come prima, ci riduciamo ad usare come $g(x)$ le funzioni caratteristiche

$$\int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \varphi(nx) dx \underset{\substack{y=nx \\ dx = \frac{1}{n} dy}}{=} \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} \varphi(y) dy$$



Ora

$$\int_{na}^{mb} \varphi(y) dy = \underbrace{\int_{na}^{kT} \varphi}_{\text{primo}} + \underbrace{\int_{kT}^{RT} \varphi}_{\text{centrale}} + \underbrace{\int_{RT}^{mb} \varphi}_{\text{ultimo}}$$

Il primo e l'ultimo sono quantità limitate (integrale di funzione limitata su insieme di lunghezza $\leq T$).

Il centrale

$$\int_{kT}^{RT} \varphi(y) dy = (R-k) \int_0^T \varphi(y) dy$$

Ora basta osservare che $k = \left\lceil \frac{na}{T} \right\rceil$ e $R = \left\lfloor \frac{mb}{T} \right\rfloor$

A questo punto basta dividere per n e passare al limite

$$\frac{1}{n} \int_{na}^{nb} \varphi(y) dy = \boxed{\frac{\text{limitato}}{n}} + \boxed{\frac{(a-k)}{n}} \int_0^T \varphi(y) dy$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 $\frac{b-a}{T}$

In conclusione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = (b-a) \boxed{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(y) dy}$$

costante

Sembra strano, ma questo implica anche che

$$\int_0^1 f_n(x) \cdot e^x dx \rightarrow \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \varphi(y) dy}_{\text{costante}} \cdot \int_0^1 e^x dx$$

$\uparrow$
 roba qualunque
 in $L^2((0,1))$

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 13

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

CONVERGENZA DEBOLE (in $L^p(X, m, \mu)$)Def. Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(X, m, \mu)$ e sia $f_\infty \in L^p(\dots)$.Si dice che $f_n \rightarrow f_\infty$ se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) g(x) d\mu = \int_X f_\infty(x) g(x) d\mu \quad \forall g \in L^q(\dots)$$

Questo vale se $p \in [1, +\infty)$; nel caso $p = +\infty$ si indica $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$
(il motivo della $*$ si vede nella terza parte del corso)

Fatti fondamentali

- ① Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p , allora $\{f_n\}$ è limitata in L^p
(idem per la $*$)
- ② Se $\{f_n\}$ è limitata in L^p , allora esiste $f_{n_k} \rightarrow f_\infty \in L^p$ ← [Aggiunto dopo video]
- ③ Se $\mu(X) < +\infty$, allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^p \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^r \quad \forall r \leq p$$

Quindi in questo caso $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 è la più debole di tutte, mentre $f_n \xrightarrow{*} f_\infty$ in L^∞ è la più forte tra le deboli.

- ④ Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p , allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n(x)|^p d\mu \geq \int_X |f_\infty(x)|^p d\mu$$

- ⑤ Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^1 (la più debole di tutte) e φ è convessa, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi(f_n(x)) d\mu \geq \int_X \varphi(f_\infty(x)) d\mu.$$

Esempio 1 $X = (a, b)$ con misura di Lebesgue

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

Per quali p ammette limite debole in L^p ?

Già visto nel caso $(a, b) = (0, \pi)$ e $p = 2$.

La cosa vale in generale. Mostriamo che $\sin(nx) \xrightarrow{*} 0$ in $L^\infty((a, b))$.

Devo dim. che

$$\int_a^b \sin(nx) g(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^1((a, b))$$

Fatto importante: se $\{f_n\}$ è limitata in L^p , allora la conv. debole basta testarla su una classe di funzioni di test che spazza un denso in L^q

In questo caso prendiamo $g = \mathbb{1}_{[c, d]} =$ funzione caratteristica di $(c, d) \subseteq (a, b)$ e banalmente

$$\int_a^b \sin(nx) g(x) dx = \int_c^d \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \left[\cos(nx) \right]_{x=c}^{x=d} \rightarrow 0$$

Essendo (a, b) di misura finita, vale che

$$\sin(nx) \xrightarrow{*} 0 \text{ in } L^\infty \Rightarrow \sin(nx) \rightarrow 0 \text{ in } L^p \quad \forall p \geq 1$$

Esempio 2 (a, b) come sopra, $f_n(x) = \sin(\sqrt{n}x)$

Anche in questo caso $f_n(x) \rightarrow 0$ in ogni L^p

Dimostrazione come sopra, solo che nella primitiva esce $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Oss. Più in generale $\sin(ax) \rightarrow 0$ se $|a| \rightarrow +\infty$ in ogni $L^p((a, b))$ (debole, MAI FORTE)

Esempio 3 (a,b) come sopra, $f_n(x) = \sqrt{n} \sin(nx)$

Converge debole a qualcosa in qualche L^p ?

[Un po' visto quando abbiamo considerato $\sqrt{n}$ in sp. di H.]

Non può convergere debole, perché NON è limitata in nessun L^p . Basta verificare, essendo (a,b) limitato, per $p=1$.

$$\int_a^b |f_n(x)| dx = \sqrt{n} \int_a^b |\sin(nx)| dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{na}^{nb} |\sin(y)| dy \xrightarrow{+\infty}$$

$\uparrow$
 $nx=y$
 $dx = \frac{1}{n} dy$

$\int_{na}^{nb} |\sin(y)| dy$

$\sim \frac{2}{\pi} (b-a)n$
(eserc. analisi 1)

Nessuna s.succ. è limitata $\Rightarrow$ nessuna s.succ. può conv. deb.

Nel caso $p=2$, esibire esplicitamente una $g \in L^2$ t.c.

$$\int_a^b \sqrt{n} \sin(nx) g(x) dx \rightarrow 0$$

[Oss. preliminare: se il limite debole esistesse sarebbe 0, almeno nel caso in cui $(a,b) = (0,\pi)$ perché il limite delle componenti sarebbe 0]

Poniamo

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k^2 x)$$

[ricorda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_{k^2}$]

[converge perché $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$]

Nel caso $(a,b) = (0,\pi)$ abbiamo

$$\int_a^b \sqrt{n} \sin(nx) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(k^2 x) dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ non è un } \square \text{ perfetto} \\ i & \text{se } n = i^2 \end{cases}$$

e questa non tende a 0.

Se l'intervallo è (a,b) generico, dovrebbe venire uguale, solo con qualche termine di bordo in più.

Esempio 4 (a,b) come sempre.

Se $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^p , cosa possiamo dire di $f_n \cdot \varphi$?

Cautele: Intanto deve essere definito. Diciamo $\varphi \in C^0([a,b])$. Questo garantisce $f_n \cdot \varphi \in L^p$. (Uso che φ è limitata)

CLAIM: $f_n \varphi \rightarrow f_\infty \varphi$ nello stesso L^p

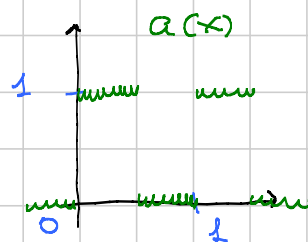
Devo dire che $\int_a^b f_n \underbrace{\varphi g}_{\hat{g} \in L^q} dx \rightarrow \int_a^b f_\infty \underbrace{\varphi g}_{\hat{g} \in L^q} dx \quad \forall g \in L^q$
quindi è vero

Oss. Ho usato solo che $\varphi \in L^\infty((a,b))$.

Esempio 5 La conv. debole non ha nulla a che fare con la puntuale, ad esempio

$$a(nx) \xrightarrow{*} \frac{1}{2} \quad \text{in } L^\infty((a,b))$$

(e quindi in $L^p((a,b))$)



Domanda: se $f_n(x) \leq \tau$ per ogni $x \in (a,b)$ e $f_n \rightarrow f_\infty$ in $L^p((a,b))$, è possibile che $f_\infty(x) > \tau$ da qualche parte? (su un insieme di misura positivo?)

La risposta è NO: il limite debole può avere solo valori "intermedi".

La dim. basta farlo per la conv. debole L^1 , almeno nel caso di insiemi di misura finita.

Dim 1 Supponiamo che esista $M > \tau$ tale che, posto

$$S_M := \{x \in (a,b) : f_\infty(x) \geq M\}$$

si abbia $\text{meas}(S_M) > 0$.

[Nota: se

$$\text{meas}(\{x \in (a,b) : f_\infty(x) > \tau\}) > 0,$$

allora esiste $M > \tau$ t.c. $\text{meas}(S_M) > 0$, in quanto

$$\{x \in (a,b) : f_\infty(x) > \tau\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\tau + \frac{1}{n}} \quad]$$

Poniamo $g =$ caratteristica di S_M e osserviamo che

$$\int_a^b f_n(x) \cdot g(x) dx = \int_{S_M} f_n(x) dx \leq \tau \text{meas}(S_M)$$

↓

$f_n \leq \tau$ ovunque

$$\int_a^b f_\infty(x) \cdot g(x) dx = \int_{S_M} f_\infty(x) dx \geq M \text{meas}(S_M)$$

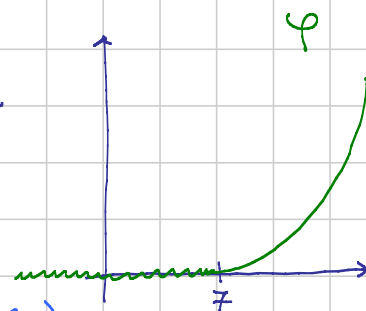
Mettenendo insieme $M \text{meas}(S_M) \leq \tau \text{meas}(S_M)$ che è assurdo se $\text{meas} > 0$.

Dim 2 Considero φ convessa come in figura.

Osservo che

$$\int_a^b \varphi(f_n(x)) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(perché $f_n(x) \leq \tau$ sempre)



D'altra parte

$$0 \leq \int_a^b \varphi(f_\infty(x)) dx \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(f_n(x)) dx = 0$$

↓ φ convessa

$\Rightarrow \varphi(f_\infty(x)) \equiv 0 \Rightarrow f_\infty(x) \leq \tau$ tramite insieme di mis. nulla.

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 14

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

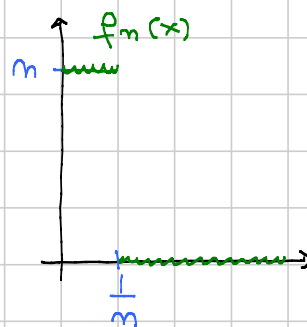
Note Title

06/10/2020

Esempi ulteriori di convergenza debole

Esempio 1 $(0,1)$ con misura di Lebesgue

$$f_n(x) = n \mathbb{1}_{(0, \frac{1}{n})}(x)$$



Per $p > 1$, abbiamo che $\|f_n\|_{L^p(0,1)} = \{n^{p-1}\}^{\frac{1}{p}}$
 $\downarrow +\infty$

quindi manca la limitatezza, quindi non può conv. debolmente.

Domanda: possiamo esibire $g \in L^q$ tale che $\int_0^1 f_n g$ non converga a nulla?

I pbm. sono in $x=0$, proviamo ad usare le solite $g(x) = \frac{1}{x^a}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) \frac{1}{x^a} dx &= n \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x^a} dx = n \left[x^{1-a} \right]_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1-a} \\ &= \frac{1}{1-a} n \frac{1}{n^{1-a}} = \frac{n^a}{1-a} \rightarrow +\infty \quad \forall a \in (0,1) \end{aligned}$$

D'altra parte $g(x) \in L^q \Leftrightarrow aq < 1$, cioè $a < \frac{1}{q}$.

Fissato $p > 1$, troviamo $q \in (1, +\infty)$ (reale), quindi troviamo a positivi con $a < \frac{1}{q}$, e questo è quello che ci serve.

Conclusione: NO conv. debole in L^p per $p > 1$.

Per $p=1$ abbiamo che $\{f_n(x)\}$ è limitata in L^1 , quindi non ci sono ostruzioni alla convergenza debole.

Se ci fosse un limite debole, questo sarebbe $\equiv 0$.

Supponiamo $f_n \rightarrow f_0$ in L^1 , e supponiamo $f_0 \not\equiv 0$, diciamo wlog $f_0(x) \geq M > 0$ su un insieme A di misura > 0 . Possiamo anche supporre che $A \subseteq (a, 1)$ per un qualche $a > 0$.

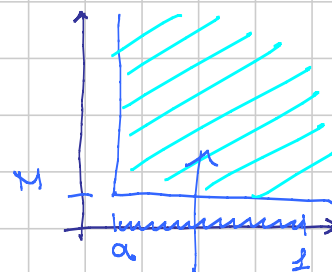
Considero come $g \in L^\infty$ la caratteristica di questo A . Allora

$$\int_0^1 f_n(x) g(x) dx \rightarrow \int_0^1 f_0(x) g(x) dx$$

$$\int_A f_n(x) dx \quad \int_A f_0(x) dx$$

per un grande
caso appena $\frac{1}{n} < a$

$$M \cdot \text{meas}(A)$$



f_0 sta qua su
un insieme di
misura positiva

Quindi l'unica possibilità è che $f_n \rightarrow 0$, ma allora ho un assurdo usando $g \equiv 1$.

Dim. alternativa Osserviamo che, se $g(x)$ è continua, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{n}} g(x) dx = g(0)$$

(esercizio analisi I)

Quindi il fantomatico limite debole f_0 dovrebbe soddisfare

$$\int_0^1 f_0(x) g(x) dx = g(0) \quad \forall g \in C^0([0, 1])$$

Una tale $f_0(x) \in L^1$ non esiste. Già visto 1000 volte, ma facciamo 1001...

Usiamo g_n come in figura



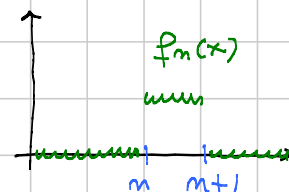
Allora essendo continue

$$1 = g_n(0) = \int_0^1 f_n(x) g_n(x) dx$$

$\downarrow \nearrow$ per convergenza puntuale
 dominata da $|f_n(x)|$

Esempio 2 $(0, +\infty)$ con misura di Lebesgue

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$$



È ovvio che $f_n(x)$ non ha limite forte in nessun L^p (il limite dovrebbe essere 0).

Ha limite debole in qualche L^p ??

SI, per ogni $p > 1$

(Osservazione: $\mu(X) = +\infty$, quindi non vi è nessuna inclusione tra gli spazi L^p , e quindi nessuna implicazione tra conv. deboli)

① Per $p > 1$ si ha che $\int_0^{+\infty} f_n(x) g(x) dx \rightarrow 0$ banalmente

per ogni g che è caratteristica di intervallo, e queste spaziano un denso in L^q se $q < +\infty$

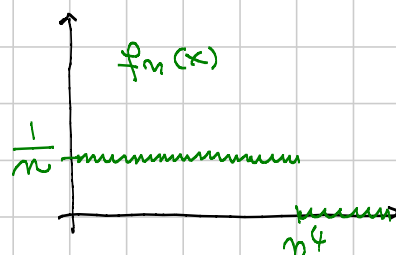
(nota: NON spaziano un denso in L^∞)

② Per $p = 1$, f_n non converge debole a 0. Basta scegliere $g(x) \equiv 1$ (e questa sta in L^∞).

③ Per $p = 1$, f_n non converge debole a qualcosa $\neq 0$.
 Altrimenti esisterebbero A limitato e $M > 0$ (wlog) t.c.
 $\mu_{\text{Leb}}(A) > 0$ e $f_n(x) \geq M$ per ogni $x \in A$.
 Ora uso come $g(x)$ la caratteristica di A .

Esempio 3 $(0, +\infty)$ con Lebesgue

Domanda: $f_n(x)$ converge a qualcosa in qualche senso?



Studiamo intanto la limitatezza

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|^p dx = n^4 \cdot \frac{1}{n^p}$$

→ Se $p > 4$, allora $f_n(x) \rightarrow 0$ in L^p forte (quindi a maggior ragione debole)

→ Se $p < 4$, allora $\{f_n\}$ non è limitata in L^p , quindi non può convergere nemmeno debolmente

Sarebbe interessante trovare una g esplicita che fa andare male la cosa (provare con $g(x) = \frac{1}{(x+1)^a}$)

→ Se $p = 4$, allora $\|f_n\|_4 \equiv 1$, quindi la conv. debole è possibile. Teoricamente anche quella forte.

FORTE NO: il limite puntuale è 0 e questo dovrebbe coincidere con il limite forte, ma allora $\|f_n\|_4$ dovrebbe andare a 0, il che non avviene.

DEBOLE SI: dico che $f_n \rightarrow 0$ in $L^4([0, +\infty))$.
Devo dire che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) g(x) dx \rightarrow 0 \quad \forall g \in L^q = L^{4/3}$$

Basta fare per le caratteristiche di intervalli che in $L^{4/3}$ spaziano un denso.

— 0 — 0 —

Esempio 4 (a,b) intervallo con Lebesgueconvergenza unif. $\Rightarrow$ conv. puntualeconv. unif. $\Rightarrow$ conv. L^p forte in ogni $L^p \Rightarrow$ conv. deboleconv. debole $\nRightarrow$ conv. puntualeconv. forte $\Rightarrow$ conv. puntuale quasi ovunque (ma solo di una sotto succ.)

Se $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente (q.o.)
 e $f_n \rightarrow g_\infty$ debole di qualche tipo,
 posso concludere che $f_\infty = g_\infty$??

A meno di sottrarre, posso supporre $f_\infty \equiv 0$ oppure $g_\infty \equiv 0$.
 Supponiamo $f_\infty \equiv 0$. Allora

$$\int_a^b f_n(x) g(x) dx \rightarrow \int_a^b g_\infty(x) g(x) dx \quad \forall g \in L^q((a,b))$$

$\downarrow$ (puntuale dominata
 da $|g(x)| \in L^1$ perchè $g \in L^q \Rightarrow g \in L^1$)

Questo ci dice che $\int_a^b g_\infty(x) g(x) dx = 0$ per ogni $g \in L^q$

[Due g_∞ aggiunti dopo video]

e questo imnesca FLCT.

Domanda: serve davvero che la misura sia finita?

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 15

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $f(x) = \sqrt{x}$. Per quali $p \geq 1$ si ha che $f \in W^{1,p}((0,1))$?

Brutal mode: probabilmente $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ è la derivata debole, quindi

$$f'(x) \in L^p \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{p/2}} dx \text{ converge} \Leftrightarrow p < 2$$

Verifichiamo che f' è la derivata debole

$$\int_0^1 \sqrt{x} \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

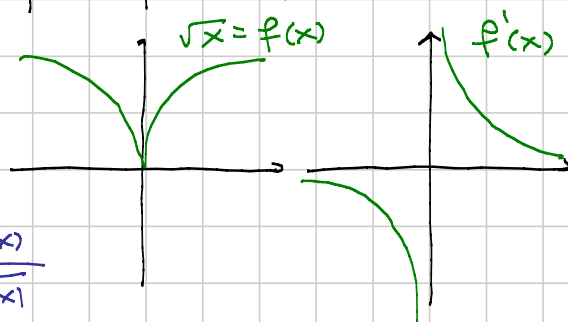
Avendo φ supp. cpt., possiamo trovare $0 < a < b < 1$ tale che $\varphi \equiv 0$ fuori di (a,b) , quindi gli int. sono in realtà in (a,b) , e lì vale l'integr. per parti tra funzioni C^∞ . I termini di bordo se ne vanno.

Esempio 2 $f(x) = \sqrt{|x|}$ in $(-1,1)$. È vero che $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ per x pari, estesa poi per disparità?

[S] Per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$ deve valere

$$\int_{-1}^1 |x|^{1/2} \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} + \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}}$$

Ancora se $\varphi(0) \neq 0$, questi integrali hanno senso



$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{-1}^{-\varepsilon} \dots + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dots + \int_{\varepsilon}^1 \dots \quad (\text{integr. primo e ultimo per parti}) \\ &= \left[|x|^{1/2} \varphi(x) \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dots + \left[|x|^{1/2} \varphi(x) \right]_{\varepsilon}^1 + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon^{1/2} \varphi(-\varepsilon) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dots - \varepsilon^{1/2} \varphi(\varepsilon) + \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}} dx - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} dx \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \quad \quad \text{(integrale di una funzione limitata)} \quad \quad \quad \int_{-1}^0 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{|x|}} dx - \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x}} dx \\
 &\quad \quad \quad \text{(volendo per defn. di integrale improprio)} \\
 &= \text{RHS.}
 \end{aligned}$$

Esempio 3 Siano u e v in $L^1_{\text{loc}}((-1,1))$ (o volendo anche L^∞)
 Supponiamo che

$$\int_{-1}^1 u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$ tale che $\varphi(0) = 0$.

restrizione rispetto alla solita classe

Domanda: possiamo concludere che v è la deriv. debole di u ?

Risposta: **NO** (N.B. possiamo concludere che v è la deriv. debole di u in $(-1,0)$ e in $(0,1)$, NON in $(-1,1)$)

Prendiamo $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad v(x) \equiv 0$

$$\text{LHS} = \int_{-1}^1 u(x) \varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi'(x) dx = \varphi(1) - \varphi(0) = 0 = \text{RHS.}$$

Esempio 4 Stessa cosa imponendo come classe $\varphi \in C_c^\infty((-1,1))$ tali che $\varphi(0) = 10$.

La condizione è lineare, quindi vale l'uguaglianza non appena $\varphi(0) \neq 0$. Ma anche se φ nulle in 0 sono differenza di 2 φ non nulle: $\varphi(x) = (\varphi(x) + \psi(x)) - \psi(x)$ scegliendo una qualunque $\psi \in C_c^\infty((-1,1))$ con $\psi(0) \neq 0$

Formula di integrazione per parti (Estensione della relazione nella def. di derivata debole)

Siano f e g in $W^{1,1}((a,b))$ (se stanno in qualche altro $W^{1,p}((a,b))$, ancora meglio)

Allora vale la classica formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

dove

- f' e g' sono le derivate DEBOLI
- gli integrali hanno senso perché f e g sono limitate
- i valori di f e g al bordo (e non solo) sono ben definiti perché si tratta di funzioni continue (detto meglio: nella classe di f e g c'è un unico rappresentante continuo)

Dim. Quasi ovvia a partire dalla definizione H , quasi impossibile a partire dalla W .

Per la def H , esistono $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ di classe C^∞ t.c.

$$\begin{aligned} f_n &\rightarrow f \quad \text{e} \quad g_n \rightarrow g \quad (\text{in } L^1, \text{ ma pure uniform.}) \\ f'_n &\rightarrow f' \quad \text{e} \quad g'_n \rightarrow g' \quad \text{in } L^1 \end{aligned}$$

Per ogni n vale la formula classica

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n g'_n dx &= f_n(b)g_n(b) - f_n(a)g_n(a) - \int_a^b f'_n g_n dx \\ \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \text{conv. unif. in } [a,b], \text{ bordo compreso} \quad \quad \quad \downarrow \text{conv. unif.} \times \text{conv. } L^1 \\ \int_a^b f g' dx & \quad \quad \quad f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad \quad \quad - \int_a^b f' g \end{aligned}$$

$$\int f_n g'_n - \int f g' = \underbrace{\int f_n (g'_n - g')}_{\text{limitato}} \underbrace{\downarrow}_{\substack{L^1 \\ 0}} - \underbrace{\int (f - f_n) g'}_{\substack{\leq \varepsilon \text{ per } n \text{ grande}}} \underbrace{\uparrow}_{\text{Fisso}}$$

Derivata del prodotto Se f ha derivata debole f' in (a,b)
 g " " " g' in (a,b)
 allora fg ha derivata debole $f'g + fg'$ in (a,b)

(Supponiamo $f, g, f', g' \in L^1_{loc}((a,b))$).

Dim Intanto f e g sono in realtà $C^0((a,b))$, non necessariamente fino al bordo dato il "loc" sulle derivate (ad esempio $\frac{1}{x}$ ha derivata debole $-\frac{1}{x^2}$ in $(0,1)$, ma qui ci vogliono i loc).

Questo basta per dedurre che fg e $f'g + fg'$ stanno in $L^1_{loc}((a,b))$, e anzi $fg \in C^0((a,b))$.

Per def. H abbiamo $f_n \rightarrow f$ e $g_n \rightarrow g$ unif. sui qnt. $\subseteq (a,b)$

$f'_n \rightarrow f'$ e $g'_n \rightarrow g'$ in $L^1((c,d))$ per ogni $(c,d) \subset\subset (a,b)$

A n fisso abbiamo derivate classiche, cioè per ogni $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$

$$\int_a^b f_n(x) g_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b (f'_n(x) g_n(x) + f_n(x) g'_n(x)) \varphi(x) dx$$

e tutto passa al limite, dal momento che possiamo restringerci ad un sottointervallo $(c,d) \subset\subset (a,b)$ che contiene comunque tutto il supporto di φ .

MORALE La def. W è comoda per passare al limite
 La def. H " " per fare i conti, e ottenere formule.

Esercizio Allo stesso modo si vede che se f' è deriv. debole di f , allora $siu f$ ha deriv. debole, e questa è $\cos f \cdot f'$.

Rincollamento Siano $f \in L^1((0,3))$, $g_1 \in L^1((0,2))$, $g_2 \in L^1((1,3))$.

Supponiamo

(i) g_1 è derivata debole di f in $(0,2)$

(ii) g_2 " " " " " $(1,3)$

Allora

- $g_1 \equiv g_2$ (quasi ovunque) in $(1,2)$
- f è derivabile debolmente su $(0,3)$ e la sua derivata è quello che ci aspettiamo.

Dim. Per ogni $\varphi \in C_c^\infty((1,2))$ vale

$$\int_1^2 g_1(x) \varphi(x) dx = \int_0^2 g_1(x) \varphi(x) dx = - \int_0^2 f(x) \varphi'(x) dx$$

$\uparrow$
 $g_1 = f' \text{ in } (0,2)$

$$= \int_0^2 g_2(x) \varphi(x) dx = \int_1^3 g_2(x) \varphi(x) dx$$

$\uparrow$
 $g_2 = f' \text{ in } (1,3)$

Quindi $\int_1^2 (g_2(x) - g_1(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \dots$ FLCV...

Detto g il "rincollamento" di g_1 e g_2 , fissata $\varphi \in C_c^\infty((0,3))$

$$\int_0^3 f(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{3/2} f(x) \varphi'(x) dx + \int_{3/2}^3 f(x) \varphi'(x) dx$$

$$\int_0^{3/2} f(x) \varphi'(x) dx = f\left(\frac{3}{2}\right) \varphi\left(\frac{3}{2}\right) - \int_0^{3/2} g_1(x) \varphi(x) dx$$

$\uparrow$
 g

$$\int_{3/2}^3 f(x) \varphi'(x) dx = -f\left(\frac{3}{2}\right) \varphi\left(\frac{3}{2}\right) - \int_{3/2}^3 g_2(x) \varphi(x) dx$$

$\uparrow$
 g

Ho usato l'integrazione per parti estesa

da cui la tesi. [Alternativa: scrivere φ come somma di φ_1 e φ_2 con supporti in $(0,2)$ e $(1,3)$, rispettivamente]

— 0 — 0 —

[Estremi di integrazione sistemati dopo video]

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 16

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

METODO DIRETTO

$$\min \left\{ \int_0^2 (u'^2 + \sin x \cdot u) dx : u(0) = 3 \right\}$$

Questo supremum benissimo farlo con il metodo indiretto

1 Formulazione debole

$$F(u) = \int_0^2 (u'^2 + \sin x \cdot u) dx \quad u \in \mathbb{X}$$

↑ derivata debole

$$\mathbb{X} := \{ u \in H^1((0,2)) : u(0) = 3 \}$$

Devo osservare varie cose

- La DBC $u(0) = 3$ è ben definita in $H^1((0,2))$, perché sono funzioni continue e posso prendere i valori puntuali
(altre cond. deboli erano $u(0) = u(2)$, $u(0) = 3u(2) + 5$, $u(1) = 7$, $u(0) = u(1) = u(2) = 3$, $\int_0^2 u(x) dx = 7$)

ma NON posso mettere $u'(0) = 0$ o comunque condizioni puntuali sulle derivate prime)

- $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, perché gli integrali vengono finiti (qui occorre osservare che gli integrali hanno senso in H^1).

2 Compattezza Considero la "solita" nozione di convergenza

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u_\infty && \text{(unif. sulle funzioni)} \\ u_n' &\rightarrow u_\infty' && \text{(debole } L^2 \text{ sulle derivate)} \end{aligned}$$

Dimostro che ogni succ. $\{u_n\} \subseteq \mathbb{X}$ con $F(u_n) \leq M$ ammette s.succ. conv. in $\mathbb{X}$.

Supponiamo di aver voluto fare le cose strane 😊, ambientandoci il pbm in

$$\hat{X} := \{u \in W^{1,3/2}((0,2)) : u(0) = 3\}$$

Andava abbastanza bene purché

- il valore puntuale $u(0) = 3$ è ben definito
- $\int u \sin x$ è ben def., in quanto u è continua
- $\int \dot{u}^2$ è ben definito in $W^{1,3/2}$, a patto di ammettere il valore $+\infty$, quindi

$$F : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

↑ forse sarebbe $\hat{F}$

In fase di opt., prendevo come nozione di conv.

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif. in } [0,2]$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ debolmente in } L^{3/2}((0,2))$$

(volendo potevo anche chiedere in $L^{5/4}$ 😊)

Ottenevo s.succ. conv. ?

Osservo che $|x|^{3/2} \leq x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi

$$\int_0^2 |\dot{u}|^{3/2} dx \leq \int_0^2 (\dot{u}^2 + 1) \leq \int_0^2 \dot{u}^2 + 2$$

Come prima

$$|u_n(x)| \leq |u_n(0)| + \int_0^x |\dot{u}_n(t)| dt$$

$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}$

$$\leq 3 + \left\{ \int_0^2 |\dot{u}_n(t)|^{3/2} dt \right\}^{2/3} \left\{ \int_0^2 1^3 dt \right\}^{1/3}$$

$$\leq 3 + \sqrt[3]{2} \cdot \|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}}$$

e quindi

$$\int_0^2 \sin x \cdot u_n(x) dx \geq -6 - \sqrt[3]{2} \|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}}$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} M &\geq F(u_n) = \int_0^2 \dot{u}_n^2 + \int_0^2 u_n \sin x \\ &\geq \|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}}^2 - 2 - 6 - 2\sqrt[3]{2} \|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}} \end{aligned}$$

da cui

$$\|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}}^2 - 2\sqrt[3]{2} \|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}} \leq M + 8$$

$$\Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^{3/2}} \leq M'$$

$$\Rightarrow \exists \dot{u}_{n_k} \rightharpoonup \dot{v} \text{ debole } L^{3/2}((0,2)) \text{ e anche } \frac{5}{4} \text{ ☺}$$

Ora immergo A.A. con la $\frac{1}{3}$ -Hölderianità e concludo come prima.

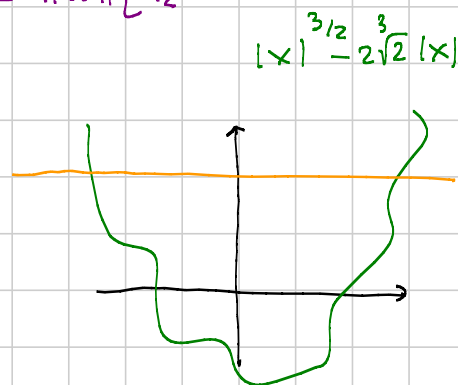
[3] SCI. Se ho impostato in $\mathbb{X}$, è la SCI della norma sulla parte di funzione e la continuità dell'integrale risp. conv. unif. sulla parte di funzione.

Se avevo scelto $\hat{\mathbb{X}}$, allora sulla parte $\int_0^2 \sin x \cdot u_n(x) dx$ era uguale (conv. unif.)

Sulla parte di derivata segue dal fatto generale

$$\left. \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ (basta } L^1 \text{ debole)} \\ \varphi \text{ è convessa} \end{array} \right\} \Rightarrow \liminf \int_0^2 \varphi(u_n) \geq \int_0^2 \varphi(u_\infty)$$

[4] Regolarità fino a C^∞ e nascita della NBC in $x=2$ funzionano come sempre



Varianti: potrei ambientare in $W^{1,4}$?

DBC e integrali non danno problemi, addirittura con valori in $\mathbb{R}$

In fase di compattezza, dipende dalla nozione di convergenza

Scenario 1 $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., $u_n \rightarrow u_\infty$ debole L^4

Qui andava male, perché da $F(u_n) \leq M$ non è possibile avere un bound su $\|u_n\|_{L^4}$, o per lo meno non è ovvio.

(La formulazione NON è abbastanza debole per avere cpt, nel senso che $W^{1,4}$ è troppo "piccolo", cioè con troppo poche succ. convergenti da immettere la coercività).

Scenario 2 $u_n \rightarrow u_\infty$ unif., $u_n \rightarrow u_\infty$ debole L^2 (o anche L^1)

Qui funziona tutto apparentemente bene, nel senso che trovo s.succ. $u_{n_k} \rightarrow v_\infty$ debole L^2 . Nessuno però mi può garantire che $v_\infty \in L^4$ (servirebbe un equibound $\|u_n\|_{L^4} \leq M'$, ma allora si torna ai guai dello scenario 1).

Quindi in $W^{1,4}$ le cose vanno male, e così in ogni $W^{1,p}$ con $p > 2$. Per essere precisi: uno avrebbe SCI, ma NON CPT. Per $p \leq 2$ invece tutto ok.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 17

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

APPROCCIO VARIATIONALE AI BVP

Boundary Value Problems

Idea: vogliamo risolvere un'eq. diff. con dati al bordo e per farlo ci convertiamo un problema di min di cui quell'eq. sia ELE.

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3, u(2) = 5 \end{cases}$$

ELE $\leadsto (Lp)' = Ls \leadsto L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s$

$[Lp(x, u, \dot{u})]' = Ls(x, u, \dot{u}) \Leftrightarrow (\dot{u})' = u^3 + x^5$

$$F(u) := \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) ds$$

Formulazione variazionale debole

hanno senso in X

$$\min \{ F(u) : \underbrace{u \in H^1((0,2)), u(0)=3, u(2)=5}_{\text{su cui minimizziamo}} \}$$

Da qui in poi è standard. Usiamo la nozione di convergenza

$u_m \rightarrow u_\infty$ unif.

$\dot{u}_m \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole L^2

La compattanza dei sottolivelli segue dalla stima

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 - 32 |s| \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A$$

↑
↑
↑
↑

OCCHIO
OCCHIO

Al passaggio precedente abbiamo assertedo che esiste $A \geq 0$ tale che

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

Nota bene (Analisi 1): l'ultima disuguaglianza è equivalente a dire che

$$\frac{1}{8} s^4 - 32|s|$$

è limitata dal basso (da $-A$) su tutto $\mathbb{R}$ (è continua e tende all'infinito per $s \rightarrow \pm\infty$).

Dalla disuguaglianza segue la compattezza dei sottolivelli.

$$M \geq F(u_m) \geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 + \frac{1}{8} u_m^4 - A \geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 dx - 2A$$

e da questo segue che

$$\int_0^2 \dot{u}_m^2 dx \leq 2M + 4A \quad \leadsto \quad \|\dot{u}_m\|_{L^2((0,2))} \leq M' \quad \leadsto \quad \dot{u}_{m_k} \rightharpoonup v_\infty$$

Al solito modo

$$|u_m(x)| \leq \underbrace{|u_m(0)|}_3 + \underbrace{\sqrt{x}}_{\leq \sqrt{2}} \underbrace{\|\dot{u}_m\|_{L^2}}_{\leq M'} \leq 3 + \sqrt{2} M'$$

Da qui per A.A. $u_{m_{k_i}} \rightarrow u_\infty$ unif. Al solito $v_\infty = \dot{u}_\infty$.

Oss. Qui non abbiamo usato il termine $\frac{1}{8} s^4$. Quindi bastava una maggiorazione del tip

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \underbrace{\frac{1}{4} s^4 - 32|s|}_{\text{Questa è limitata dal basso}} \geq \frac{1}{2} p^2 - A$$

Questa è limitata dal basso

Da qui in poi è tutto standard fino all'esistenza di almeno una soluzione di classe C^∞ che risolve il problema.

L'unicità si può dimostrare in 2 modi.

Via equazione Siano u e v due soluzioni del problema (con quale regolarità?)

$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3, \quad u(2) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{v} = v^3 + x^5 \\ v(0) = 3, \quad v(2) = 5 \end{cases}$$

Considero la differenza $w := u - v$. Sottraendo le equ. troviamo

$$\ddot{u} - \ddot{v} = u^3 - v^3$$

Moltiplico per $u - v$ e integro in $(0, 2)$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (\ddot{u} - \ddot{v})(u - v) dx &= \int_0^2 (u^3 - v^3)(u - v) dx \\ &\quad \text{|| per parti} \qquad \qquad \qquad \geq 0 \\ &\quad \text{(segue dalla debole crescenza} \\ &\quad \text{della funzione } x^3) \\ - \int_0^2 (\dot{u} - \dot{v})^2 dx &+ \left[(\dot{u} - \dot{v})(u - v) \right]_0^2 \\ &\quad \text{" al bordo} \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto

$$\int_0^2 \dot{w}^2 dx \leq 0$$

il che è possibile $\Leftrightarrow \dot{w} \equiv 0 \Leftrightarrow w \equiv \text{costante}$ e la costante è 0 perché w è nulla al bordo.

Via funzionale Non basta dire che il p.to di min. è unico, perché a priori potrebbero esserci soluzioni che non sono p.ti di minimo.

Quindi occorrono due fasi

Step 1: ogni solus. è p.to di min. per il funzionale in X

Step 2: il p.to di min. è unico.

Entrambi gli step seguono dalla convessità della Lagrangiana
(ma occorre aver chiaro COME e PERCHÉ).

Sia $u_0(x)$ una qualunque sol. dell'equazione. Allora ogni elemento $w \in X$ lo scriviamo come

$$w(x) = u_0(x) + v(x)$$

↑ verifica $v(0) = v(2) = 0$

Ora vale che

$$\begin{aligned} F(w) &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 u_0^2}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_0^2 u_0 v}_{\text{green}} + \frac{1}{2} \int_0^2 v^2 + \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^2 (u_0 + v)^4}_{\text{purple}} + \underbrace{\int_0^2 x^5 u_0}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_0^2 x^5 v}_{\text{green}} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^2 u_0^4}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_0^2 u_0^3 v}_{\text{green}} \\ &\quad \text{(convessità di } x^4) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} F(w) &\geq F(u_0) + \underbrace{\int_0^2 (u_0 v + u_0^3 v + x^5 v) dx}_{\substack{=0 \text{ se } u_0 \text{ risolve l'equ.} \\ \text{(basta integrazione per parti)}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 v^2 dx}_{\geq 0} \\ &\geq F(u_0) \end{aligned}$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $v \equiv 0 \leadsto v \equiv \text{cost} \leadsto v \equiv 0$.

Questo risolve step 1 (u_0 è p.to di min.) e step 2 (unicità del p.to di min.).

— o — o —

Esempio 2
$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{cases}$$

Formulazione variazionale

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx : \underbrace{u \in H^1((0,2)), u(0) = 3}_{\times} \right\}$$

Nota bene: La NBC $\dot{u}(2) = 0$ NON compare nella formulazione variazionale.

Non avrebbe senso farla comparire perché non hanno senso i valori puntuali delle derivate.

Il procedimento di minimizz. è analogo a prima (basta una DBC per avere la equi-limitatezza delle $\{u_n(x)\}$ necessaria per immergere A.A.).

Dopo aver dim. l'esistenza del minimo, uno deve verificare che questo soddisfa la NBC in $x=2$. Questo avviene in fase 4...

$$\varphi(t) := F(u_0 + t \overset{\substack{\text{elemento qualunque di } H^1((0,2)) \text{ con } v(0)=0 \\ \text{oppure } v \in C_c^\infty((0,2))}}{v})$$

un p.to $\uparrow$ di min

Derivando sotto il segno di integrale (dopo aver verificato che si può) si arriva a

$$\int_0^2 (\dot{u}_0 \dot{v} + u_0^3 v + x^5 v) dx = 0 \quad (\text{ELE-int } 1)$$

Questo visto nella forma

$$\int_0^2 \underbrace{\dot{u}_0}_{\neq} \underbrace{\dot{v}}_{\varphi} dx = - \int_0^2 \underbrace{(u_0^3 + x^5)}_g \underbrace{v}_{\varphi} dx$$

dice che g è la derivata debole di f (per questo basta $v \in C_c^\infty$)
da cui

$$(u_0)' = u_0^3 + x^5$$

da cui al solito modo si guadagna $u_0 \in C^\infty$.

Usando poi delle funzioni test v che non si annullano in $x=2$ e integrando per parti (ELE - int 1) scopriamo che nasce la NBC $u_0(2)=0$, che non era stata messa all'inizio.

Questo completa esistenza e regolarità.

Per l'unicità, valgono i due procedimenti descritti sopra.

Si consiglia di ripercorrere il procedimento per vedere dove si usano la DBC e la NBC.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 18

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

APPROCCIO VARIAZIONALE AI BVP - SECONDA PUNTATA

Esempio 1 $\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) = 0 \end{cases}$

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx : u \in H^1((0,2)) \right\}$$

↑ senza ulteriori condizioni

Cosa cambia? Un p.to importante! In fase di opt., non ci sono più le DBC che permettono di limitare $|u_n(x)|$ che immescano poi A.A.

In questo caso è fondamentale la stima

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A$$

↑↑

Da questa, supponendo $F(u_n) \leq M$, deduciamo al solito modo che $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$, ma anche che

$$\frac{1}{8} \int_0^2 u_n(x)^4 dx \leq M + 2A$$

Per il lemma della media integrale, questo ci dice che
lunghezza interv.

$$\exists x_n \in (0,2) \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{8} u_n(x_n)^4 = \frac{1}{8} \int_0^2 u_n(x)^4 dx$$

da cui $|u_n(x_n)| \leq M'' (= 4M + 8A)$.

↑ dipende da n

e quindi

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_n)|}_{\leq M''} + \underbrace{|x - x_n|^{1/2}}_{\leq \sqrt{2}} \underbrace{\|u_n\|_{L^2((0,2))}}_{\leq M'} \quad \forall x \in [0,2]$$

da cui ancora una volta una stima uniforme su $|u_n(x)|$ che permette di applicare A.A.

Oss. In generale, ci sono due modi di avere stime puntuali su $u_n(x)$

→ stima uniforme su $\|u_n\|_{L^2}$ più DBC in almeno un estremo;

→ " " " $\|u_n\|_{L^2}$, più stima uniforme su qualche integrale di u_n , e conclusione con il teorema della media integrale.

Per il resto, sono i soliti ragionamenti (SCI, esistenza del minimo, regolarità e nascita delle NBC, unicità in uno dei due modi).

LE PRIME VOLTE SCRIVERE TUTTI I DETTAGLI

Occhio: se si fa l'unicità via funzionale, non basta la stima

$$F(w) \geq F(u_0) + \int_0^2 (u_0 v^2 + u_0^3 v + x^5 v) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 v^2 dx \geq F(u_0)$$

perché da $v \equiv 0$ si arriva a $v \equiv \text{costante}$, ma v non è nulla al bordo e quindi NON basta per dedurre $v \equiv 0$.

Occorre sfruttare anche la stretta convessità di $\frac{1}{4} s^4$

$$\int_0^2 (u_0 + v)^4 dx = \underbrace{\int_0^2 u_0^4 dx}_{F(u_0)} + \underbrace{4 \int_0^2 u_0^3 v dx}_{\text{ELE}} + \int_0^2 v^2 (6u_0^2 + 4u_0 v + v^2) dx$$

forma quadratica definita positiva

Quindi l'ultimo integrale è nullo se e solo se per ogni $x \in [0, 2]$ vale che $v(x) = 0$ oppure form. quadr. = 0, cioè $u_0(x) = 0$ e ancora $v(x) = 0$. In ogni caso $v(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Ci si può appellare alla stretta convessità di s^4 dicendo che

$$(a+b)^4 \geq a^4 + 4ab^3 \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $b=0$.

Usandola con $a = u_0(x)$ e $b = v(x)$ otteniamo che $F(u) \geq F(u_0)$ e vale il segno di $=$ se e solo se $v(x) \equiv 0$ (se ci fosse $x_0 \in [0,2]$ in cui $v(x_0) \neq 0$, allora la disug. sarebbe stretta in tutto un intorno di x_0 , e questo renderebbe stretta la disug. tra gli integrali).

$$\boxed{\text{Esempio 2}} \quad \begin{cases} u'' = u^3 + x^5 \\ u(0) = u(2) \\ u'(0) = u'(2) \end{cases}$$

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx : u \in H^1((0,2)), u(0) = u(2) \right\}$$

L'uguaglianza tra le derivate nascerà ovunque, l'uguaglianza $u(0) = u(2)$ ha senso in H^1 .

Anche qui in fase di compattezza NON si può contare sulle DBC

Esempio 3 (Digressione) Consideriamo il pbm. di minimo

$$\min \left\{ \int_0^2 (u'^2 - 7u) dx : u \in H^1((0,2)), u(0) = u(2) \right\}$$

È facile che il problema NON ha soluzione e $\inf = -\infty$ (basta osservare che $u_n \equiv n$ si ottiene $F(u_n) \rightarrow -\infty$).

Cosa va storto nel metodo diretto?

Dalla stima $F(u_n) \leq M$ non si riescono ad ottenere stime uniformi su $\|u_n\|_{L^2}$ oppure $\{u_n(x)\}$ e quindi la parte di compattezza fallisce.

Se ci fosse una DBC sarebbe completamente diverso.
Supponiamo che ci sia $u(0) = 7$. Allora

$$|u_m(x)| \leq |u_m(0)| + |x|^{1/2} \|u_m\|_{L^2} \leq 7 + \sqrt{2} \|u_m\|_{L^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} M \geq F(u_m) &= \int_0^2 (u_m(x)^2 - 7 u_m(x)) dx \\ &= \|u_m\|_{L^2}^2 - 7 \int_0^2 u_m(x) dx \\ &\geq \|u_m\|_{L^2}^2 - 7 \int_0^2 |u_m(x)| dx \\ &\geq \|u_m\|_{L^2}^2 - 7 \cdot 2\sqrt{2} \|u_m\|_{L^2} - 49 \cdot 2 \end{aligned}$$

quindi $\|u_m\|_{L^2} \leq M'$ (solito sottolivello di un polinomio di 2° grado)

Se avessimo avuto da risolvere
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{cases}$$

l'approccio variazionale non funzionava per mancanza di compattezza !! Questo vuol dire che il problema BVP non ha soluzione?

1° modo Sarà vero che ogni soluzione è p.to di min. del funzionale?

Sia u_0 una soluzione, e poniamo $w = u_0 + v$. Allora

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_0^2 \dot{u}_0^2 + \int_0^2 \dot{v}^2 + 2 \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} - 7 \int_0^2 u_0 - 7 \int_0^2 v \\ &= F(u_0) + \underbrace{\int_0^2 (2 \dot{u}_0 \dot{v} - 7v) dx}_{=0} + \int_0^2 \dot{v}^2 dx \geq F(u_0) \end{aligned}$$

Il secondo termine è nullo perché al bordo resta

$$2 [\underbrace{\dot{u}_0(2) \dot{v}(2)}_{\text{dall'equazione}} - \underbrace{\dot{u}_0(0) \dot{v}(0)}_{\text{ovvio se } u_0+V \text{ è ammissibile}}]$$

Non ensemble pti di min., non possono esserci sol. dell'egu.

2° modo Dall'equazione vediamo che $\ddot{u} < 0$ sempre, quindi $\dot{u}$ è strett. decrescente, ma allora $\dot{u}$ non può avere gli stessi valori agli estremi.

Achtung! Se uno non era cauto in fase di compattezza, non si accorgeva di tutto questo !!

Esempio 4 Problema di min. con penalizzazione del dato al bordo

$$\min \left\{ \int_0^2 (\dot{u}^2 + 7u) dx + \underbrace{u(0)}_{\uparrow \uparrow} : u \in C^1([0,2]), u(2) = 5 \right\}$$

il valore in $x=0$ compare nel funzionale

Formulazione debole: solita sostituendo C^1 con H^1 (notiamo che $u(2)$ e $u(0)$ hanno senso in H^1)

Compattezza: come sopra, dopo aver osservato che la DBC $u(2)=5$ ci permette di stimare $u(0)$ e su cui termini di $\|\dot{u}\|_{L^2}$

SCI: solito + osservazione che $u_m(0) \rightarrow u_\infty(0)$ grazie al fatto che a livello di funzioni abbiamo conv. uniforme.

REGOLARITÀ + ELE:

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + 2t\dot{u}\ddot{u} + t^2\ddot{u}^2 + 7u + 7tv) dx + u(0) + t v(0)$$

$$\text{da cui } \varphi'(0) = \int_0^2 (2\dot{u}\ddot{u} + 7v) dx + v(0)$$

Fase 1: usando $v \in C_c^\infty$ troviamo l'eq. $2\ddot{u} = 7$, da cui tanta regolarità

Fase 2: avendo regolarità, integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) + \int_0^2 (2\dot{u}\ddot{u} + 7v) dx \\ &= v(0) + \underbrace{2\dot{u}(2)v(2) - 2\dot{u}(0)v(0)}_{\substack{\uparrow \\ =0 \text{ per la DBC} \\ \text{che porta } v(2)=0}} + \underbrace{\int_0^2 (-2\ddot{u} + 7)v dx}_{=0} \\ &= v(0) (1 - 2\dot{u}(0)) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{arbitrario} \end{aligned}$$

Quindi alla fine ogni pto di min. deve risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{7}{2} \\ u(2) = 5 \\ \dot{u}(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{DBC data} \\ \text{NBC nota su the road} \end{array}$$

— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 19

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

APPROCCIO VARIAZIONALE AI BVP (TERZA PUNTATA)

(Come porzione delle NBC "strane")

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 5 \end{cases}$$

1° modo Partendo da $L(x, s, p)$, se non metto BC quando mi viene uizzato, nascono su the road delle Neumann del tipo

$$L_p(x, u, \dot{u}) = 0$$

agli estremi dell'intervallo.

Cerchiamo una funzione della x che vale 3 in $x=0$ e 5 in $x=2$, ad esempio $x+3$.

Ci piacerebbe che

$$L_p(x, u, \dot{u}) = \dot{u} - x - 3$$

perché sostituendo $x=0$ e $x=2$ in $\dot{u} - x - 3 = 0$ avrei esattamente le NBC richieste. Quindi serve

$$L_p(x, u, \dot{u}) = p - x - 3$$

$$\Rightarrow L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 - (x+3)p + \text{roba}(x, s)$$

Serve pure che $(L_p)' = L_s$ sia $\ddot{u} = u^3 + x^5$

$$(\dot{u} - x - 3)'$$

"

$$\ddot{u} - 1 \Rightarrow L_s(x, u, \dot{u}) = u^3 + x^5 - 1$$

da cui

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 - (x+3)p + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s - s$$

Formulazione variazionale:

$$F(u) := \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 - (x+3)u + \frac{1}{4} u^4 + (x^5-1)u \right) dx$$

e cerchiamo

$$\min \{ F(u) : u \in H^1((0,2)) \}$$

↑ senza ulteriori condizioni

Verifica: ELE diventa

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u})$$

$$[\dot{u} - x - 3]' = u^3 + x^5 - 1$$

$$\ddot{u} - 1 = u^3 + x^5 - 1$$

$$\ddot{u} = u^3 + x^5$$



NBC on the road:

$$L_p(x, u, \dot{u}) = 0 \text{ al bordo}$$

$$\dot{u} = x+3 \text{ al bordo}$$



Si tratta di dimostrare che il minimo esiste, è regolare, risolve il problema ed è unico.

Compattezza

(oss.: non abbiamo DBC che diano una mano, quindi $F(u)$ deve stimare sia $\dot{u}$ sia u)

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 - (x+3)p + \frac{1}{4} s^4 + (x^5-1)s$$

$$x \in [0, 2] \rightarrow \geq \frac{1}{2} p^2 - 5|p| + \frac{1}{4} s^4 - 3|s|$$

occluso a seguir e
valori assoluti

$$\geq \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{88} s^4 - A$$

(limitatezza dal basso di
opportune funzioni)

[Come al solito va raccontata come "esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c. $L(x, s, p) \geq \dots$ per ogni $x \in [0, 2]$ e per ogni $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ "]

Grazie a questa otteniamo le stime volute

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^2((0,2))} \leq M' \quad (\text{trovare } M')$$

$$F(u_m) \leq M \Rightarrow \int_0^2 u_m(x)^4 dx \leq M''$$

↑
stima su L^0

$$\Rightarrow \exists x_m \in (0, 2) \text{ t.c. } |u_m(x_m)| \leq M'''$$

↑
media integr.

$$\Rightarrow |u_m(x)| \leq M_4 \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

↑
passo prec. + stima di $\|u_m\|_2$

Questo garantisce $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ unif. e $i_{m_k} \rightarrow i_\infty$ debole L^2 .

SCI Quasi gratis nel senso che, se u_m converge a u_∞ come ↑

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 i_m^2 \geq \int_0^2 i_\infty^2 \quad (\text{sci della norma})$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 (x+3) i_m = \int_0^2 (x+3) i_\infty \quad (\text{prod. scalare con } (x+3))$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 \left(\frac{1}{4} u_m^4 + (x^5-1) u_m \right) = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} u_\infty^4 + (x^5-1) u_\infty \right) \quad (\text{conv. unif.})$$

Regolarità, nascita delle NBC strane, unicità no come sempre.

2° modo Cambio di variabili

Cerco una funzione $u_0(x)$ qualunque che rispetti le NBC strane $i_0(0) = 3$ e $i_0(2) = 5$. Un esempio è

$$u_0(x) = \frac{1}{2} x^2 + 3x \quad i_0(x) = x+3$$

Poniamo $u(x) = u_0(x) + v(x)$ e osserviamo che $\dot{v}(0) = \dot{v}(2) = 0$.

Domanda: quale equazione risolve $v(x) = u(x) - u_0(x)$?

$$\begin{aligned} \ddot{v}(x) &= \ddot{u}(x) - \ddot{u}_0(x) = u(x)^3 + x^5 - 1 = (u_0(x) + v(x))^3 + x^5 - 1 \\ &= \left(v(x) + \frac{1}{2} x^2 + 3x \right)^3 + x^5 - 1 \end{aligned}$$

Conclusione : v risolve

$$\ddot{v} = \left(v + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^3 + x^5 - 1$$

con NBC $\dot{v}(0) = \dot{v}(2) = 0$. Imposto questo pbm. in modo variazionale.

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\left(s + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^4 + (x^5 - 1)s$$

Si verifica (farlo!) che la ELE associata è quella voluta e le NBC $L_p = 0$ pure. Quindi cerco

$$\min \left\{ \int_0^2 L(x, v, \dot{v}) : v \in H^1((0, 2)) \right\}$$

↑ nessuna ulteriore condizione

L'unica cosa delicata è la compattezza, per cui spero in una stima del tipo : esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c.

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}s^4 - A \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

Un modo è quello di espandere la quarta potenza e stimare i termini con la x . In alternativa si può usare la convessità

$$\frac{1}{4}\left(s^4 + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^4 \geq \frac{1}{4}s^4 + s^3\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) \geq \frac{1}{4}s^4 - 8|s|^3$$

↑
 $(a+b)^4 \geq a^4 + 4a^3b$

e idem sul termine di primo grado.

Data questa stima, si procede poi come sempre per la compattezza ed il resto è storia

Occhio a far vedere la nascita ou the road delle NBC

$$\dot{v}(0) = \dot{v}(2) = 0.$$

3° modo Aggiungere al funzionale i valori $u(0)$ e $u(2)$ opportunamente pesati

$$F(u) = \underbrace{\int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx}_{\text{Questo produce ELE senza NBC strane}} + \alpha u(0) + \beta u(2),$$

scegliendo bene α e β .

$$\varphi(t) = F(u + t v) = \dots$$

$$\varphi'(0) = \int_0^2 (\dot{u} \dot{v} + u^3 v + x^5 v) dx + \alpha v(0) + \beta v(2) = 0$$

Quando l'integrale per parti viene

$$0 = \int_0^2 (-\ddot{u} + u^3 + x^5) v dx + \dot{u}(2) v(2) - \dot{u}(0) v(0) + \alpha v(0) + \beta v(2)$$

In fase 1 ($v \in C_c^\infty$) se ne va l'integrale, in fase 2 nascono le condizioni

$$\dot{u}(0) = \alpha \quad \dot{u}(2) = -\beta \quad \leadsto \alpha = 3 \text{ e } \beta = -5$$

Alla fine di questo considero il problema

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx + 3u(0) - 5u(2) : u \in H^1((0,2)) \right\}$$

Il problema è come sempre da compattezza.

$$\text{Come sempre} \quad \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{10} s^4 - A$$

$$\text{e come sempre} \quad |u_m(x)| \leq |u_m(x_m)| + \sqrt{2} \| \dot{u}_m \|_{L^2((0,2))}$$

Ora però

$$|u_n(x_n)| = |u_n(x_n)^4|^{1/4} \leq \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 u_n(x)^4 dx \right\}^{1/4}$$

da cui

$$|u_n(x)| \leq \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 u_n(x)^4 dx \right\}^{1/4} + \sqrt{2} \|u_n\|_{L^2} \quad \forall x \in [0, 2].$$

Quest'ultima stima vale in particolare per $x=0$ e $x=2$, quindi

$$\begin{aligned} M \geq F(u_n) &\geq \underbrace{\frac{1}{2} \|u_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{10} \|u_n\|_{L^4}^4}_{\text{parte dovuta all'integrale}} - 2A \\ &\quad - \underbrace{8 \left\{ \frac{1}{4\sqrt{2}} \|u_n\|_{L^4}^4 + \sqrt{2} \|u_n\|_{L^2} \right\}}_{\text{dovuto ai termini } u(0) \text{ e } u(2)} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{soliti discorsi}}{\geq} \underbrace{\frac{1}{4}}_{\uparrow} \|u_n\|_{L^2}^2 + \underbrace{\frac{1}{20}}_{\uparrow} \|u_n\|_{L^4}^4 - B$$

Da qui $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$ e $\|u_n\|_{L^4} \leq M''$ e avanti come sempre.

— o — o —

ACHTUNG! TIMEO COMPACTIAM ET DONA FERENTEM !!!

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 20

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Qualche risultato di compattezza

Compattezza via crescita e DBC

Supponiamo che la Lagrang. soddisfi una stima del tipo

$$L(x, s, p) \geq A |p|^\alpha - B |s|^\beta - C \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

dove A, B, C, α, β sono numeri reali con $A > 0$, $\alpha > \beta$, $\alpha > 1$

Allora ogni successione $\{u_n\}$ con

$$\int_a^b L(x, u_n, u'_n) dx \leq M_1$$

← bound sui funzionali

$$|u_n(\text{qualche parte})| \leq M_2$$

← bound sui valori in un qualche pto x_n , anche dipendente da n .

ammette una s. succ. f.c.

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \text{ debole in } L^\alpha(a, b)$$

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \text{ uniform.}$$

Dim Partiamo dalla solita (indichiamo con x_n la "qualche parte")

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x_n)| + |x_n - x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \|u'_n\|_{L^\alpha} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$$

$$\leq M_2 + M_3 \|u'_n\|_{L^\alpha}^{b-a} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$$

Ora

$$M_1 \geq F(u_n) \geq \int_a^b (A |u'_n|^\alpha - B |u_n|^\beta - C) dx$$

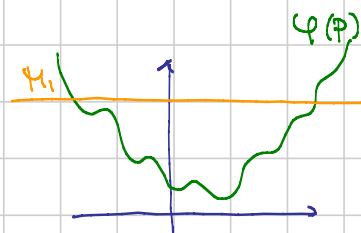
$$= A \|u'_n\|_{L^\alpha}^\alpha - B \int_a^b (M_2 + M_3 \|u'_n\|_{L^\alpha})^\beta - C (b-a)$$

da cui

$$M_1 \geq A \|u_m\|_{L^\alpha}^\alpha - B(b-a) (M_2 + M_3 \|u_m\|_{L^\alpha})^\beta - C(b-a)$$

Questa è una disuguaglianza del tipo

$$\varphi(\|u_m\|_{L^\alpha}) \leq M_1$$



dove $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} \varphi(p) = +\infty$ (qui ho usato che $A > 0$ e $\beta < \alpha$)

quindi ci permette di dedurre che $\|u_m\|_{L^\alpha} \leq M_1'$, da cui

$u_m \rightarrow v_\infty$ debole $L^\alpha(a,b)$ (qui usiamo $\alpha > 1$).

A questo p.to dalla stima su $u_m(x)$ deduciamo l'equilimit. e concludiamo con A.A.

— o — o —

Achtung! Senza almeno un bound in un p.to con funzione nulla (pensare all'esempio con $u^2 \neq u$)

— o — o —

Compattezza via media integrale

Supponiamo che la Lagrang. verifichi una stima del tipo

$$L(x, s, p) \geq A |p|^\alpha + g(s) - B \quad \forall x \in [a,b], \forall (s,p) \in \mathbb{R}^2$$

$\uparrow$ bound può essere incluso in g

dove $A > 0$, $\alpha > 1$, e $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} g(s) = +\infty$

Allora ogni successione $\{u_m\}$ con $\int_a^b L(x, u_m, u'_m) dx \leq M$

ammette una s.succ. che converge al solito modo, cioè

$u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif., $u'_{n_k} \rightarrow u'_\infty$ debole L^α .

[Dim.] Essendo g limitata dal basso abbiamo anche che

$$L(x, s, p) \geq A|p|^\alpha - B_1 \quad \forall (x, s, p) \in \dots$$

e quindi

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \|u_n\|_{L^\alpha} \leq M'$$

Analogamente $L(x, s, p) \geq g(s) - B$, da cui

$$F(u_n) \leq M \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(u_n) dx \leq M''$$

$M'' = M + (b-a)B$

Per il teorema della media integrale

$$\exists x_n \in (a, b) \quad \text{t.c.} \quad g(u_n(x_n)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(u_n) dx \leq M''.$$

Sfruttando ora completamente che $g(s) \rightarrow +\infty$ per $s \rightarrow \pm\infty$, da questa deduciamo che

$$|u_n(x_n)| \leq M_4$$

Da qui otteniamo $|u_n(x)| \leq M_5$ per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal momento che abbiamo GIÀ una stima unif. su $\|u_n\|_{L^\alpha}$, e dunque sulle costanti di Hölder.

Oss. Non abbiamo usato DBC, ma avevamo ipotesi molto più forti sulla Lagrangiana.

Esempio 1 $F(u) = \int_0^\pi (\dot{u}^2 + \sin x \cdot u^4) dx,$

$$G(u) = \int_0^\pi (\dot{u}^2 + \cos x \cdot u^4) dx.$$

Ammettiamo minimo con DBC $u(0)=0$, $u(\pi)=3$?

Il primo ovviamente ☺ SI, il secondo ovviamente ☹ NO.

F(u) Metodo diretto quasi gratis

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M \quad (\text{uso sin } x \geq 0 \text{ in } [0, \pi])$$

↑ lo stesso

DBC $\leadsto$ stima su $|u_n(x)|$ $\leadsto$ e poi è storia.

G(u) L'idea è che $\cos x$ diventa negativo in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e a quel punto la quarta potenza vince sulla seconda

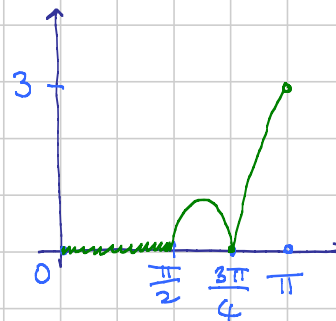
Consideriamo una funzione come in figura, e moltiplichiamo per n il tratto compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Più formalmente

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ n v(x) & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \\ w(x) & \text{se } x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi] \end{cases}$$

(con $v(x)$ nulla agli estremi, ma $v(x) \equiv 0$)

↑
ad esempio la retta come in figura



È chiaro che $u_n \in H^1((0, \pi))$ e

$$G(u_n) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (n^2 \dot{v}(x)^2 + \cos x \cdot n^4 \cdot v(x)^4) dx$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} (\dot{w}^2 + \cos x \cdot w^4) dx \quad \text{Fisso}$$

$$= n^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \dot{v}(x)^2 dx + n^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x \cdot v(x)^4 dx + \text{Fisso}$$

$\rightarrow -\infty$

numero negativo
e questo è il termine che
costringe

Esempio 2 $F(u) = \int_0^7 \{ \sqrt{1+u^4} - \sqrt{1+u^2} \} dx$

$$G(u) = \int_0^7 \{ \sqrt{1+u^2} - \sqrt{1+u^4} \} dx$$

Esiste il minimo in $C^1([0,7])$ con $u(0)=0$?

F(u) SI $L(x,s,p) = \sqrt{1+p^4} - \sqrt{1+s^2}$

$$\geq p^2 - |s| - 1$$

(ho usato che $\sqrt{1+s^2} \leq 1+|s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$)

A questo punto la compattezza segue come nel 1° risultato grazie alla DBC. (Fondamentale che $2 > 1$)

G(u) NO Osserviamo che $L(x,s,p) \leq 1+|p| - s^2$.

Prendo una qualunque $\varphi \in C^1([0,7])$ con $\varphi(0)=0$ e pongo $\varphi \neq 0$

$$u_n(x) := n \varphi(x)$$

e osservo che

$$G(u_n) \leq \int_0^7 (1 + n|\dot{\varphi}(x)| - n^2 \varphi(x)^2) dx$$

$$= 7 + n \int_0^7 |\dot{\varphi}(x)| dx - n^2 \int_0^7 \varphi(x)^2 dx$$

↑ questo converge
→ $-\infty$

Variante : → cosa succedeva con DBC $u(0)=7$

→ cosa succedeva senza DBC ?
— 0 — 0 —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 21

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

ARGOMENTI DI TRONCAMENTO

Esempio 1 $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + \dot{u}^2 + u^3 + 3u) dx : u(0) = u(1) = 4 \right\}$

Esistenza del minimo

→ Formulazione variazionale in $H^1((0,1))$ ammettendo il valore $+\infty$
(non so se $\dot{u}^4$ è integrabile)

In alternativa: in $W^{1,4}((0,1))$ ammettendo solo valori reali,
oppure in $W^{1,3}((0,1))$ sempre ammettendo $+\infty$.

→ Compattezza: classica rispetto a $u_n \rightarrow u_\infty$ unif e
 $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ in qualche senso debole.

Questo segue da

$$L(x, s, p) = p^4 + p^2 + s^3 + 3s \geq p^4 - 2|s|^3 \quad (\text{importante: } 4 > 3)$$

e dal fatto che abbiamo DBC.

→ SCI: nella parte di funzione segue dalla conv. unif.
Nella parte di derivata segue da conv. debole L^2 +
convessità di $p^4 + p^2$.

→ Regolarità + ELE: tutto classico fino a C^∞ . Dopo aver
verificato che si può derivare $F(u+\tau v)$ sotto il segno
di integrale, arriviamo a

$$\int_0^1 \{ (2\dot{u} + 4\dot{u}^3) \dot{v} + (3 + 3u^2) v \} dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

↑
basta C^1 e nulla al bordo

Questa ci dice che $(2u + 4u^3)' \overset{\text{derivata debole}}{=} 3(u^2 + 1)$

$$u \in H^1 \Rightarrow u \in C^0 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow 2u + 4u^3 \in C^1 \overset{\text{compatibilità classica}}{=}$$

Vorrei tanto dire che $u \in C^1$...

Osservo che $\varphi(p) := 2p + 4p^3$, vista come $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva e $\varphi'(p) = 2 + 12p^2 \geq 2$ (> 0 sempre)

Per il teorema della funzione inversa $\varphi^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^∞ ma allora

$$u = \varphi^{-1}(\underbrace{2u + 4u^3}_{\in C^1}) \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$$

Per BOOTSTRAP, continuando ad usare la reg. di φ , si arriva a $u \in C^\infty$.

→ Unicità: non è detto che ci sia.

Esempio 2 $\min_u \left\{ \int_0^1 (u^2 + u^4 + u^4 + 4u) dx : u(0) = u(1) = 0 \right\}$

Per metodo diretto facile, il minimo esiste.

CLAIM $-1 \leq u(x) \leq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$

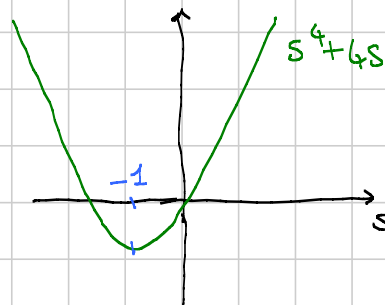
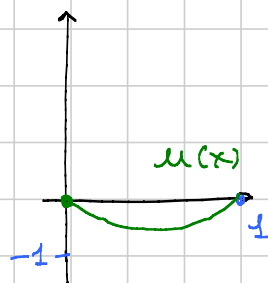
Consideriamo $u^4 + 4u$: questa ha minimo per $x = -1$

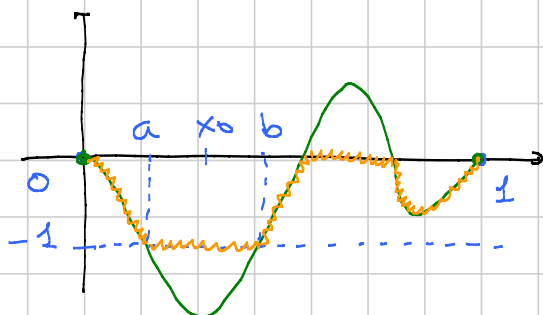
$$4u^3 + 4 = 0 \rightsquigarrow u = -1$$

Come può che $u(x)$ vada sopra 0?

Come può che $u(x)$ vada sotto -1?

NO Infatti, se lo facesse, TRONCANDO migliorerei, dal momento che risparmierei sia sulla derivata, sia sulla funzione





Supponiamo il minimo fatto
come in figura.
Allora truncando meglio

Come dirlo rigorosamente

Sia $u(x)$ il p.to di min. (qui si vede che è unico, ma non serve).

Supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in (0,1)$ t.c. $u(x_0) < -1$.

Pongo

$$a := \sup \{ x \in [0, x_0] : u(x) \geq -1 \}$$

$$b := \inf \{ x \in [0, x_0] : u(x) \geq -1 \}$$

Allora si verifica che $u(a) = u(b) = -1$ e

$$u(x) < -1 \quad \forall x \in (a, b) \quad (0 < a < x_0 < b < 1)$$

(dimostrare per bene questi punti).

Ora poniamo

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in [0, a] \\ -1 & \text{se } x \in [a, b] \\ u(x) & \text{se } x \in [b, 1] \end{cases}$$

e verifichiamo che $\hat{u} \in H^1((0,1))$ e vale

$$F(\hat{u}) < F(u)$$

$\uparrow$
in $[0, a]$ e $[b, 1]$ coincidono

in $[a, b]$ ho risparmio netto

Questo dice che u non era minimo.

Achtung! Cercare di capire perché sarebbe sbagliato definire

$$a := \inf \{ x \in [0, x_0] : u(x) < -1 \}$$

$\leq$

$$b := \sup \{ x \in [x_0, 1] : u(x) < -1 \}$$

$\leq$

CLAIM + raffinato $u(x) > -1$ per ogni $x \in [0, 1]$ $u(x) < 0$ per ogni $x \in (0, 1)$

Supponiamo $u(x_0) = -1$ per qualche $x_0 \in (0, 1)$. Per quanto detto prima, x_0 sarebbe un pto di min. di $u(x)$, dunque $u'(x_0) = 0$. Inoltre u risolve ELE, cioè

$$(2\ddot{u} + 4\dot{u}^3)' = 4u^3 + 4$$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & 2\ddot{u} + 12\dot{u}^2\dot{u}' \quad \leadsto \begin{cases} \ddot{u} = \frac{2(u^3+1)}{2(1+6\dot{u}^2)} \\ u(x_0) = -1 \\ \dot{u}(x_0) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Questo è un pbm. di Cauchy di Analisi 2, al quale si applica il teorema di esistenza ed unicità. Una soluzione del pbm è $u(x) \equiv -1$, ma allora è l'unica soluzione !!!

Stiamo usando il pbm. di Cauchy per una equ. del tipo

$$\ddot{u} = \Phi(x, u, \dot{u})$$

— o — o —

Prima variante : stesso risultato usando ELE invece del ~~troucameuto~~

Sia $u(x)$ un pto di min. e vogliamo dim. che $u(x) \geq -1$ per ogni $x \in [0, 1]$.

Sappiamo che $u(x)$ risolve ELE : $\ddot{u} = \frac{2(u^3+1)}{6\dot{u}^2+1}$

Supponiamo che $u(x) < -1$ da qualche parte. Allora il min. di $u(x)$ in $[0, 1]$ viene assunto in un pto $x_0 \in (0, 1)$ e $u(x_0) < -1$

In quel p.to $\dot{u}(x_0) = 0$ e dall'eq. ricaviamo

$$\ddot{u}(x_0) = \frac{2(u(x_0)^3 + 1)}{1} < 0.$$

Ma nei p.ti di min $\ddot{u}(x_0)$ NON può essere < 0 .

Seconda Variante: problema con s.d.o. $u(0) = 0$, e uiente in $x=1$.
Anche qui il claim è che $u(x) \geq -1$ sempre, e anzi $>$.

Via funzionale Ora basta porre

$$a := \sup \{x \in [0, x_0] : u(x) \geq -1\}$$

osservare che $0 < a < x_0$, e porre

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in [0, a] \\ -1 & \text{se } x \in [a, 1], \end{cases}$$

ed osservare che così si risparmia

Via equazione Il ragionamento di prima funziona se il punto di min x_0 sta in $(0, 1)$.
Il problema è che il p.to di min potrebbe essere $x_0 = 1$.

Come si può aggiustare?

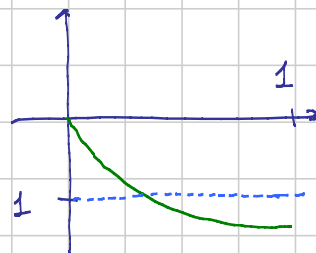
Noi sappiamo che $u(x)$ verifica

la NBC $\dot{u}(1) = 0$, quindi se

fosse $u(1) < -1$ avremmo $\ddot{u}(-1) < 0$,

il che è comunque un problema perché

basta guardare ad un intorno s_x di $+1$ in cui $\dot{u}(x)$ sarebbe strett. decresc., ma allora $\ddot{u}(x) > 0$ per x in un intorno di 1 , cioè $u(x)$ sarebbe cresc. strett. in un intorno s_x di $x=1$.



Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 22

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio
$$\begin{cases} u'' = \log u \\ u(0) = u(3) = 2 \end{cases}$$

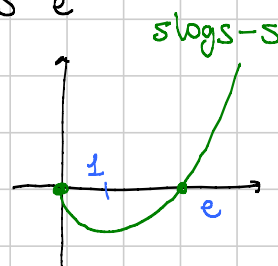
Osserviamo che una primitiva di $\log s$ è $s \log s - s$ e consideriamo

$$L(x, s, p) := \frac{1}{2} p^2 + s \log s - s$$

e il pbm. di minimo

$$\min \left\{ \int_0^3 \left(\frac{1}{2} u'^2 + u \log u - u \right) dx : u \in H^1((0, 3)), \right. \\ \left. \begin{array}{l} u(0) = u(3) = 2 \\ u(x) \geq 0 \end{array} \right\}$$

passiamo al lim. per conv. unif.



Metodo diretto standard: esistenza ed unicità del p.to di min.

Il p.to di min. risolve l'equazione?

$$\varphi(t) := F(u + tv)$$

$$\varphi'(0) = \int_0^3 (u'v + \log u \cdot v) dx$$

C'è però un **GROSSO PROBLEMA**: quando scriviamo $u + tv$, siamo sicuri che $u(x) + tv(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$?

Almeno per valori di t vicini a 0?

Questo è garantito se $v(x) \geq 0$ sempre e $t > 0$, ma questo ci porterebbe a $\varphi'(0) \geq 0$ (φ avrebbe minimo per $t=0$ ma è definita solo per $t \geq 0$) e questo non basta per immesicare FLCV.

SE sapessi che $u(x) \geq A > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, allora data $\varphi \in C_c^\infty$ qualunque (ma basta limitata) avrei la garanzia che $u + t\varphi \geq 0$ per $|t|$ piccoli.

Qui entra in gioco l'argomento di truncamento, che non posso fare sull'equazione, ma devo fare sul funzionale.

CLAIM: $u(x) \geq 1$ sempre
 $\uparrow$ p.to di min di $\text{slog} - s$

La realizzazione è la stessa della lezione precedente, e anzi si ottiene pure $u(x) > 1$.

A questo p.to il resto fila liscio.

Achtung! Non andava bene porre la condizione $u(x) > 0$ nel problema di minimo.

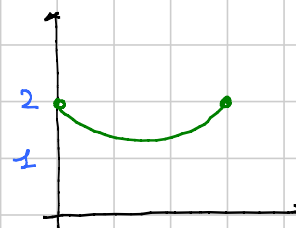
Il problema è che le disug. strette non passano al limite, quindi l'insieme di defin. non sarebbe compatto.

Andava bene porre $u(x) \geq 1$ oppure $u(x) \geq \frac{1}{2}$ oppure $u(x) \geq \frac{3}{2}$ nel problema di minimo?

NI Queste cond. passano al limite, quindi il minimo esisteva quasi gratis. Il problema è che nel ricavare ELE non potevo usare u e t di segno qualunque quando si fa $F(u+t\varphi)$ e quindi niente FLCV.

La carta vincente è minimizzare con una condizione del tipo $u(x) \geq 0$, oppure $u(x) \geq \frac{1}{2}$, e poi con l'argomento di truncamento trovare uno stimo + forte $u(x) \geq 1$.

Oss. A posteriori la soluzione è
convessa perché sta nella regione
 $u(x) > 1$ ($\ddot{u} = \log u$)



Esempio 2 (variante del precedente)

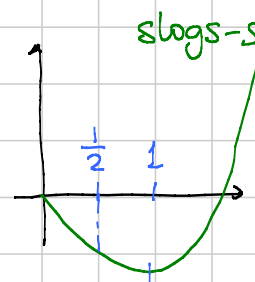
$$\ddot{u} = \log u$$

$$u(0) = u(3) = \frac{1}{2}$$

Formulazione variazionale

$$\min \left\{ \int_0^3 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + u \log u - u \right) dx : \begin{array}{l} u \in H^1((0, 3)) \\ u(0) = u(3) = \frac{1}{2} \\ u(x) \geq 0 \end{array} \right\}$$

Il minimo esiste e dimostriamo che $u(x) \geq \frac{1}{2}$
sempre con argomento di troncamento.



Oss. Valeva la stessa cosa con
 $u(0) = 2$ e $u(3) = \frac{1}{2}$

L'argomento di troncamento dava $\frac{1}{2} \leq u(x) \leq 2$ sempre.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \left(\dot{u}^2 + \frac{1}{u^4} \right) dx : u(0) = 4 \right\}$

Il problema nasce dal fatto che $\frac{1}{u^4}$ non è sempre integrabile

→ Formulazione debole

Osservo che $F(u)$ può essere considerato
in H^1 , ma occorre ammettere il valore
 $+\infty$ come valore possibile

(se c'era u^3 il problema era ben peggiore)

→ Compattità

Se $F(u_n) \leq M$ (questo taglia fuori i $+\infty$
ammessi)

allora $\|u_m\|_{L^2} \leq M \Rightarrow u_m \rightharpoonup v_\infty$ debole L^2

Grazie alla DBC abbiamo $|u_m(x)| \leq M' \Rightarrow$ da A.A. otteniamo conv. unif. delle funzioni.

Quindi a meno di s.succ.

$$u_m \rightarrow u_\infty$$

$$u_m \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

→ SCI Sulla parte di derivata è la SCI della norma

SULLA PARTE DI FUNZIONE NON SEGUE DALLA CONV. UNIF. che vale solo quando abbiamo $\varphi(u_m)$ con φ CONTINUA.

Uscita facile: LEMMA DI FATOU. Osserviamo che $\frac{1}{u^4} \geq 0$ (limitato dal basso) quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{u_m^4} dx &\geq \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_m(x)} dx \\ &\stackrel{\text{FATOU}}{=} \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_m(x)} dx \\ &\stackrel{\text{conv. unif.}}{=} \int_0^1 \frac{1}{u_\infty(x)^4} dx \end{aligned}$$

(tutto questo vale anche se ci sono 0 al denominatore)

A priori non c'è lim nella parte di funzione, ma c'è $\liminf$, che comunque basta.

Quindi il minimo esiste.

Se vogliamo calcolare ELE, c'è il problema che serve la derivabilità per $t > 0$ di $F(u+tv)$, e questa è impossibile da ottenere se $u(x)$ si annulla da qualche parte.

Brutal mode: partendo da 4, non conviene andare verso 0, perché si paga sia con u^2 sia con $\frac{1}{u^4}$

CLAIM: $u(x) \geq 4$ per ogni $x \in [0, 1]$ $\leadsto$ solito argomento di truncamento

Achtung! Se minimizzavamo con la condizione $u(x) \geq 4$, poi non potevamo fare variazioni $F(u+t\phi)$

Oss. Potremmo invece

$\rightarrow$ minimizzare con condizione $u(x) \geq 3$ (in questo caso non serve FATOU e la parte di funzione passava al limite perché $\frac{1}{s^4}$ è continua per $s \geq 3$)

$\rightarrow$ Dimostrare con arg. trunc. che $u(x) \geq 4$ sempre e quindi ricavare E.L.E.

— o — o —

Variante 1 (Senza DBC) $\min \left\{ \int_0^1 \left(u'^2 + \frac{1}{u^4} \right) dx : u \in C^1([0, 1]) \right\}$

Si vede ad occhio che $\inf = 0$, $u_n(x) \equiv n$ è succ. infizzante e quindi min non esiste.

Cosa si piantava nella dimostrazione?

Non si riusciva ad ottenere la stima uniforme su $|u_n(x)|$

Variante 2 (Con il cubo) $\min \left\{ \int_0^1 \left(u'^2 + \frac{1}{u^3} \right) dx : u \in H^1((0, 1)) \right\}$
 $u(0) = 4$

(Senza DBC il minimo è chiaramente $-\infty$ con succ.

infizzante $u_n(x) \equiv -\frac{1}{n}$)

Se aggiungo come condizione $u(x) \geq 0$, allora tutto come prima e anzi $u(x) \geq 4$ sempre.

Domanda: u può arrivare a 0 restando H^1 e tenendo $\int \frac{1}{u^3}$ limitato? Esercizio! (Pensare $H^1 \Rightarrow \frac{1}{2}$ -Hölder)

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 23

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 (Uniforme-debole = debole)

Sia $(a,b) \subseteq \mathbb{R}^n$. Consideriamo

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } (a,b)$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ debole in } L^2((a,b)) \quad (\text{o } L^p((a,b)))$$

Allora

$$f_n u_n \rightarrow f_\infty u_\infty \text{ debole in } L^2((a,b)).$$

Dim Devo dim. che $\int_a^b f_n u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_a^b f_\infty u_\infty \varphi \, dx$ per ogni $\varphi \in L^2((a,b))$.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n u_n \varphi - \int_a^b f_\infty u_\infty \varphi \right| &\leq \left| \int_a^b f_n u_n \varphi - \int_a^b f_n u_\infty \varphi \right| \\ &\quad + \left| \int_a^b f_n u_\infty \varphi - \int_a^b f_\infty u_\infty \varphi \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n - f_\infty| \cdot |u_n| \cdot |\varphi| \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_a^b (u_n - u_\infty) f_\infty \varphi \right|}_{\rightarrow 0} \quad \text{funzione } L^2 \text{ fissa} \end{aligned}$$

$$\int_a^b |f_n - f_\infty| |u_n| |\varphi| \leq \|f_n - f_\infty\|_\infty \int_a^b |u_n| |\varphi|$$

$$\leq \underbrace{\|f_n - f_\infty\|_\infty}_{\rightarrow 0} \underbrace{\|u_n\|_{L^2}}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\|\varphi\|_{L^2}}_{\text{fissa}}$$

Morale: RHS $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Oss. 1 Abbiamo usato il fatto misterioso che le succ. deb. conv. sono limitate. Volendo potevamo metterlo come ipotesi.

Oss.2 Sul secondo integrale non potevamo portare dentro il valore assoluto.

Oss.3 Cosa succedeva con l'altro termine misto? Proviamo!

$$\left| \int_a^b f_n v_n \varphi - \int_a^b f_\infty v_n \varphi \right| \leq \left| \int_a^b f_n v_n \varphi - \int_a^b f_n v_\infty \varphi \right| + \left| \int_a^b f_n v_\infty \varphi - \int_a^b f_\infty v_\infty \varphi \right|$$

$$2^\circ \leq \int_a^b \underbrace{|f_n - f_\infty|}_{\downarrow \text{ in norma uniforme}} \cdot |v_\infty| \cdot |\varphi|$$

$$1^\circ \leq \int_a^b |f_n| |v_n - v_\infty| \cdot |\varphi| \quad \text{e non so dove andare}$$

Inoltre non si può vedere come prod. scalare di v_n con funzione test fissa.

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^1 [(1+u^2)u^2 + \sin x \cdot u^4] dx : u(0) = 7 \right\}$

Domanda: il minimo esiste?

Formulo debole in $H^1((0,1))$ e osservo che è a valori reali.

Compattezza Essendo $\sin x \geq 0$ in $[0,1]$, osservo che

$$L(x, s, p) \geq p^2$$

quindi da $F(u_n) \leq M$ deduco che $\|u_n\|_{L^2} \leq M$.

Tenendo conto che $u_n(0) = 7$ deduco che

$$|u_n(x)| \leq M' \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui per A.A. e compattanza debole delle palle, a meno di s.succ.,

$$u_n \rightarrow u_{\infty} \text{ unif} \quad \text{e} \quad u_n \rightarrow u_{\infty} \text{ debole } L^2.$$

La DBC passa al limite

SCI $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. $\Rightarrow \sqrt{1+u_n^2} \rightarrow \sqrt{1+u_\infty^2}$ unif.

Sapendo inoltre che $i_n \rightarrow i_\infty$
dal lemma precedente deduciamo che

$$\sqrt{1+u_n^2} i_n \rightarrow \sqrt{1+u_\infty^2} i_\infty \text{ debole } L^2$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1+u_n^2) i_n^2 dx &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\sqrt{1+u_n^2} i\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\sqrt{1+u_\infty^2} i_\infty\|_{L^2}^2 \\ &= \int_0^1 (1+u_\infty^2) i_\infty^2 dx \end{aligned}$$

Sul termine $\sin x \cdot u_n^4$ basta la conv. unif.

Regolarità

$$\varphi(t) := F(u+tv)$$

$u = p.todi \text{ min. qualunque}$
 $v = \text{variazione ammiss.}$

$$\varphi(t) = \int_0^1 (1+(u+tv)^2) (i+ti')^2 + \sin x (u+tv)^4$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = \int_0^1 \{ &2(u+tv)v (i+ti')^2 + (1+(u+tv)^2) 2(i+ti')i' \\ &+ \sin x \cdot 4(u+tv)^3 v \} \end{aligned}$$

Questo si può fare se l'integranda si domina per t vicini a 0.

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \{ 2uv i^2 + (1+u^2) 2i i' + 4 \sin x \cdot u^3 v \} dx = 0$$

è equivalente a

$$\int_0^1 \underbrace{2u(1+u^2)}_f \underbrace{i i'}_{\varphi} dx = - \int_0^1 \underbrace{[2u i^2 + 4 \sin x u^3]}_g \underbrace{v}_{\varphi} dx$$

Questo dice che g è la derivata debole di f , cioè

$$[2\ddot{u}(1+u^2)]' = 2u\ddot{u}^2 + 4\sin x \cdot u^3$$

al LHS abbiamo la derivata debole di funzione L^2

Oss. brutal $L(x, s, p) = (1+s^2)p^2 + s^4 \cdot \sin x$

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u}) \quad \text{ho l'equazione di sopra}$$

Adesso recuperiamo regolarità su u .

$u \in H^1 \Rightarrow \text{RHS} \in L^1 \Rightarrow 2\dot{u}(1+u^2)$ è primitiva di cosa L^1
e quindi continua (anzi $W^{1,1}$)
chiamiamola ψ

$$\Rightarrow \dot{u} = \frac{\psi}{2(1+u^2)} \in C^0 \Rightarrow u \in C^1 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow \psi \in C^1$$

$\Rightarrow \dot{u} \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$. Da qui in poi è fatta e volendo possiamo scrivere l'eq. nella forma

$$2\ddot{u}(1+u^2) + \cancel{2\dot{u}} \cdot 2u\dot{u} = \cancel{2}u\ddot{u}^2 + \cancel{4}\sin x \cdot u^3$$

$$\ddot{u}(1+u^2) = -u\dot{u}^2 + 2\sin x \cdot u^3$$

$$\ddot{u} = \frac{-u\dot{u}^2 + 2\sin x \cdot u^3}{1+u^2}$$

Da qui è bootstrap una derivata per volta.

Oss. L'unicità non è chiara per $L(x, s, p)$ non è convessa nella coppia (s, p) .

— o — o —

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\dot{u}}{1+u^2} \right]^2 dx : u(0)=0, u(1)=1 \right\}$

Metodo indiretto : $L(x, s, p) = \left(\frac{p}{1+s^2} \right)^2 \leftarrow \text{NON DIPENDE DA } x$

Scrivo ELE in forma di IDENTITÀ DI BELTRAMI

$$\dot{u} L_p(u, \dot{u}) - L(u, \dot{u}) = c$$

$$L_p(s, p) = \frac{2p}{(1+s^2)^2}$$

$$\frac{2\dot{u}^2}{(1+u^2)^2} - \frac{\dot{u}^2}{(1+u^2)^2} = c \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = c(1+u^2)^2$$

$$\leadsto \dot{u} = c(1+u^2) \quad \begin{array}{l} \text{perché non} \\ \text{ho messo } \pm \end{array}$$

↑
diverso dal prec. e
di segno qualunque

$$\frac{\dot{u}}{1+u^2} = c \quad \leadsto \quad (\arctan u)' = c \quad \leadsto \quad \arctan u = cx + d$$

$$\leadsto u = \tan(cx + d)$$

Impongo DBC : $u(0)=0 \leadsto d=0$ $\leadsto u(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$
 $u(1) = \tan c \leadsto c = \frac{\pi}{4}$

Che cosa ho dimostrato? SE c'è un minimo abbastanza regolare, allora è $\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Per l'esistenza posso puntare sul metodo diretto in $H^1((0,1))$.

Formulazione debole Ok.

In fase di compattazione ho subito problemi, perché $\frac{\dot{u}}{1+u^2}$ è "piccolo", non posso dedurre che $\dot{u}$ è piccola. Vedi les. succ.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 24

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

$$F(u) = \int_0^1 \left[\frac{\dot{u}}{1+u^2} \right]^2 dx \quad u(0)=0, u(1)=1$$

Domanda: $F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M'$

IN generale NO, almeno se u_n può essere enorme.

Argomento di truncamento

$$\inf \{ F(u) : u \in H^1 + DBC \} = \inf \{ F(u) : u \in H^1 + DBC + 0 \leq u(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1] \}$$

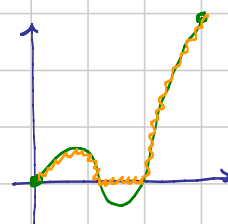
$\leq$ Sto facendo inf su meno roba

$\geq$ Ogni competitore si può migliorare in modo da rispettare la condizione.

Brutal mode: u può andare sotto 0?

No, perché se trunca ho risparmiato, o se proprio non ho perso.

IDEM se u va sopra 1.



Grossa sottigliezza (delicata, ma va capita)

Si dimostra che, se u ha un intervallo $(a,b) \subseteq [0,1]$ in cui sta negativa e 0 al bordo, allora la migliore truncando. Questo non basta per la sostituzione in quanto potrebbero esserci infiniti intervallini in cui succede, e dovrei in qualche modo iterare infinite volte il procedimento. Non è facilissimo da formalizzare.

2ª parte del corso: se $u \in H^1$, allora $\hat{u} = \max \{u, 0\} \in H^1$
 e $\hat{u}' = \begin{cases} u' & \text{dove } \hat{u} = u \\ 0 & \text{dove } \hat{u} = 0 \end{cases}$ ↑ vera truncata globale

Dato per buono che possiamo restringerci alle $0 \leq u(x) \leq 1$, possiamo finalmente avere compattezza

$$M \geq F(u_n) = \int_0^1 \frac{u_n^2}{(1+u_n^2)^2} dx \geq \frac{1}{4} \int_0^1 u_n^2 dx$$

↑
denominatore max possibile

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2}^2 \leq 4M$$

$$DBC \Rightarrow \|u_n\|_{L^\infty} \leq M' \Rightarrow \text{a meno di s.succ.}$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif e } \int u_n \rightarrow \int u_\infty$$

SCI lemma dell'altra volta, basta osservare che

$$\frac{u_n}{1+u_n^2} = \frac{1}{1+u_n^2} u_n \xrightarrow{\text{unif. x debole}} \frac{1}{1+u_\infty^2} u_\infty$$

e si conclude per sci della norma.

Regolarità Si arriva al solito modo a C^∞ (una volta arrivati a C^2 , sappiamo che è per forza $\tan(\frac{\pi}{4}x)$).

SCAPPATOIA VIA CAMBIO DI VARIABILI

$$F(u) = \int_0^1 \left[\frac{u}{1+u^2} \right]^2 dx$$

Poniamo $v(x) = \arctan(u(x))$. Allora $v(0) = 0$ e $v(1) = \frac{\pi}{4}$

Inoltre

$$\dot{v}(x) = \frac{u(x)}{1+u(x)^2}$$

Ma allora il problema equivale a $\min \left\{ \int_0^1 \dot{v}(x)^2 dx : v(0) = 0, v(1) = \frac{\pi}{4} \right\}$

e questo sappiamo che ha come soluzione $v(x) = \frac{\pi}{4}x$ 😊.

Per esercizio: usare il cambio di variabili per mostrare formalmente che $\tan(\frac{\pi}{4}x)$ è unico p.to di min in $C^1([0,1])$ e anche in $H^1((0,1))$.

Esempio 2 Sia $a > 0$ un numero reale. Studiare il problema

$$\min \left\{ \int_0^1 x^a \dot{u}^2 : u(0)=1, u(1)=2 \right\}$$

Sarà delicato stabilire dove ammettiamo u (C^1 ? H^1 ? $W^{1,p}$?)

Brutal mode: $L(x,s,p) = x^a p^2$

$$(ELE) \quad (L_p)' = L_s \quad (2x^a \dot{u})' = 0 \rightsquigarrow 2x^a \dot{u} = c$$

$$\rightsquigarrow \dot{u} = \frac{c}{2x^a} \rightsquigarrow u(x) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-a} x^{1-a} + d$$

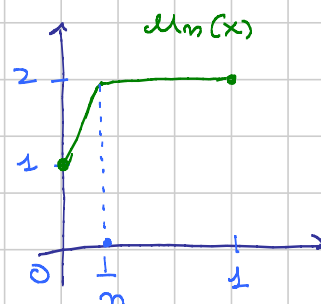
Imponendo le DBC sembra che non ci siano plem. se $a < 1$ e invece guai se $a \geq 1$. Se però anche fosse $a = \frac{1}{2}$, la soluzione non sarebbe C^1 fino a $x=0$

Congettura: $\rightarrow$ se $a \in (0,1)$ allora l'unica sol. è quella di sopra, ma non è C^1 . Quindi in C^1 non c'è minimo, ma c'è un inf. positivo.

$\rightarrow$ se $a \geq 1$, allora min. non esiste in nessuno spazio decente e inf = 0.

$a \geq 1$ Preso $u_m(x)$ come in figura, vale

$$\begin{aligned} F(u_m) &= \int_0^{\frac{1}{m}} x^a m^2 dx = m^2 \cdot \frac{1}{a+1} \frac{1}{m^{a+1}} \\ &= m^{1-a} \frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

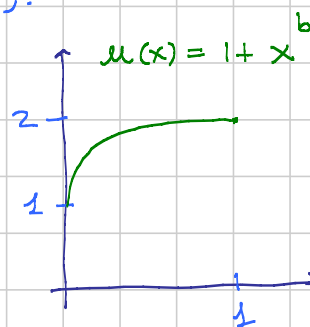


Già con questo esempio vediamo che $F(u_n) \rightarrow 0$ se $a > 1$.

Questo dice che $\inf = 0$ in H^1 , ma anche in C^1 oppure in C^∞ (basta fare piccolo raccordo).

Resta caso $a=1$. Proviamo con

$u(x) = 1+x^b$ con $b > 0$
(tendenzialm. $b \rightarrow 0$)



$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^1 x^b x^{b-1} dx = \int_0^1 b x^b dx \\ &= \frac{b}{b+1} [x^{b+1}]_0^1 = \frac{b}{b+1} \end{aligned}$$

Quando $b \rightarrow 0$, ancora una volta vedo che $\inf$ è 0 in tutte le classi che contengono queste funzioni, ma approssimando anche in C^1 o C^∞ .

Volevo basta prendere

$$u(x) = 1 + \frac{(x+\varepsilon)^b}{(1+\varepsilon)^b}$$

Queste sono C^∞ e approssimano il valore $\frac{b}{b+1}$ (... fare conto!).

$a \in (0, 1)$ Ogni competitor w lo scriviamo come

$$w = u_0 + v$$

e calcoliamo

$$F(w) = \underbrace{\int_0^1 x^a \dot{u}_0^2 dx}_{F(u_0)} + 2 \underbrace{\int_0^1 x^a \dot{u}_0 \dot{v} dx}_{\stackrel{!}{=} 0} + \underbrace{\int_0^1 x^a \dot{v}^2 dx}_{\geq 0}$$

$$\text{Ma } \int_0^1 x^a \dot{u}_0 \dot{v} = \int_0^1 x^a \frac{k}{x^a} \dot{v} = k \int_0^1 \dot{v} = v(1) - v(0) = 0$$

Domanda : posto $\alpha = \frac{1}{2}$, in quale spazio avremmo potuto applicare il metodo diretto?

Brutal mode: $u_i = \frac{c}{\sqrt{x}}$, quindi $u_i \in L^p \Leftrightarrow p < 2$

quindi per $p \geq 2$ non c'è speranza, qualcosa DEVE fallire
per $p < 2$ c'è speranza

... compattezza... $F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^p} \leq M'$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \dot{u}_n^2 \leq M$$

$$\int_0^1 |\dot{u}_n|^p dx = \int_0^1 \underbrace{|\dot{u}_n|^p x^{\frac{p}{4}}}_{\frac{p}{2}} \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{p}{4}}}}_{\frac{2-p}{2}} dx$$

Hölder $\nearrow$

$$\leq \underbrace{\left\{ \int_0^1 |\dot{u}|^2 x^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{p}{2}}}_{\leq M^{\frac{p}{2}}} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{p}{4} \frac{2}{2-p}}} dx \right\}^{\frac{2-p}{2}}$$

Vorrei tanto che l'altro converga, cioè $\frac{p}{4} \frac{2}{2-p} < 1$

$$\frac{p}{2(2-p)} < 1$$

$$p < 4 - 2p$$

$$3p < 4$$

$$p < \frac{4}{3}$$

Controllare bene gli esponenti. Il conto fatto direbbe che
per $p < \frac{4}{3}$ davvero riesco ad avere il metodo diretto in $W^{1,p}$
— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 25

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

PERDITA DI ELLITTICITÀ (Parte seconda)

Esempio 0 (già visto)

$$\min \left\{ \int_0^1 x^a \dot{u}^2 dx : u(0)=1, u(1)=0 \right\}$$

↑↑

Già visto: se $a > 1$, allora $\inf = 0$ (e min non esiste)

(Brutalmente: si può saltare da 1 a 0, o dove vuole, non pagando praticamente nulla? Chi rende possibile questo? Il coeff. che va a 0 davanti a $\dot{u}^2$)

Esempio 1

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 (\dot{u}^4 + u^3) dx : u(1) = u(-1) = 0 \right\}$$

Brutale: $\dot{u}^4 = \dot{u}^2 \dot{u}^2$

↑ quando $\dot{u} = 0$ ho un coeff. che si annulla davanti a $\dot{u}^2$

Formulazione debole

Almeno 2 possibilità

→ in $W^{1,4}$ con valori reali

→ in $H^1((-1,1))$ ammettendo il valore $+\infty$

} Non pos. per BCs
e $\int u^3$

Compattezza

Come nozione di conv. abbiamo almeno 2 poss:

- $u_n \rightarrow u_\infty$ unif e $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole L^4
- " " " " debole L^2

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M' \quad \text{grazie alla stima}$$

↑ 0 in L^4

$$L(x, s, p) = p^4 + s^3 \geq p^4 - |s|^3 \quad + \text{DBC}_s$$

(4 > 3)

Oss. Senza almeno una DBC la stima su $L(x,s,p)$ non basta
va per avere opt. (infatti senza condizioni l'inf.
è banalmente $-\infty$).

SCI Standard (funzione convessa di u + funzione
continua di u)

REGOLARITÀ $\varphi(t) = F(u+tv)$... verifico che si può derivare...

$$\varphi'(0) = \int_{-1}^1 (4\ddot{u}^3 \dot{v} + 3u^2 \dot{v}) dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

(ad es. $W^{1,4}$ + nulle in ± 1)

Bastano le $v \in C_c^\infty((-1,1))$ per dedurre che

$$(4\ddot{u}^3)' = 3u^2$$

Il LHS è per ora la derivata debole di una funzione L^1 , o
se proprio vogliamo $W^{1,4/3}$ (sappiamo che $\int \ddot{u}^4 < +\infty$).

Primi passi: $u \in H^1$, oppure $u \in W^{1,4}$, quindi $u \in C^0$
quindi RHS $\in C^0$

Compatibilità classica $\Rightarrow 4\ddot{u}^3 \in C^1$

(questo NON implica $u \in C^1$, perché dovrai fare $\sqrt[3]{}$)

Per lo meno questo implica $\ddot{u}^3 \in C^0$ e quindi $\ddot{u} \in C^0$
e quindi $u \in C^1$ (poiché $\int$ è C^0)

Altro piccolo passo $\ddot{u}^3 \in C^1 \Rightarrow \ddot{u}^3 \in \text{Lip}$

Sapendo già che u è continua, questo basta per
dedurre che u è $\frac{1}{3}$ -Hölder

(Fatto di Analisi 1: se f è continua e f^α è Lip. ($\alpha > 1$), allora
 f è $\frac{1}{\alpha}$ -Hölder)

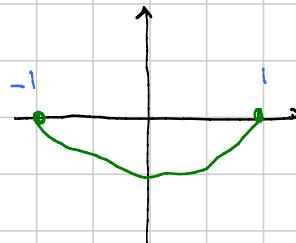
Quindi $u \in C^{1/3}$ (cioè derivabile, con derivata $\frac{1}{3}$ -Hölder)

Posso andare oltre? Il problema è che $(4\ddot{u}^3)' = 3u^2$
 $\leadsto 12\dot{u}^2\ddot{u} = 3u^2$

$\leadsto$ dove $\dot{u}$ si annulla potrebbe essere un problema ricavare $\ddot{u}$,
 a meno che anche u non si annulli.

Il problema è che c'è un p.to di min.

Intervallo in cui $\ddot{u} = 0$, ma $u < 0$.



Come dimostro le cose rigorosamente?

Step 1 $u(x) \leq 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$ (argomento di truncamento)

Step 2 $u(x) \not\equiv 0$. Basta osservare che $u_{\min} < 0$. Perché?

Basta esibire φ t.c. $F(\varphi) < 0$ e questo segue dagli esponenti
 coinvolti. Prendiamo $\varphi \not\equiv 0$, con $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi(x) > 0$
 in $(-1, 1)$. Allora

$$F(\varepsilon\varphi) = \varepsilon^4 \int_{-1}^1 \dot{\varphi}^4 dx - \varepsilon^3 \underbrace{\int_{-1}^1 \varphi^3 dx}_{\text{questo domina per } \varepsilon \rightarrow 0^+} < 0 \quad \text{per } \varepsilon > 0 \text{ piccolo}$$

[Nota bene: $u \equiv 0$ è comunque una soluzione di ELE + DBC]

Step 3 $u(x)$ ammette minimo per un certo $x_0 \in (-1, 1)$

(forse si può pure dimostrare che $x_0 = 0$, ma qui non serve).

In x_0 $\ddot{u}$ non può esistere (se esistesse $12\ddot{u}(x_0)\dot{u}(x_0)^2 = 3u(x_0)^2$)

Step 4 $u(x)$ non è più regolare di $C^{1,1/3}$. Supponiamo
 infatti che

$$|\dot{u}(t) - \dot{u}(s)| \leq M |t - s|^\alpha$$

Usandola con $s = x_0$ e $t = x$ otteniamo

$$|\dot{u}(x)| \leq M |x - x_0|^\alpha$$

coè

$$|\dot{u}(x)| \leq M |x-x_0|^{1/3} |x-x_0|^{\alpha-1/3}$$

$$\leadsto 0 \leq \frac{|\dot{u}(x)|^3}{|x-x_0|} \leq M^3 |x-x_0|^{3\alpha-1}$$

Calcolo il limite a dx per $x \rightarrow x_0^+$. Se $\alpha > \frac{1}{3}$, allora RHS $\rightarrow 0$.
Al LHS posso usare de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{|\dot{u}(x)|^3}{x-x_0} = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\dot{u}(x)^3}{x-x_0} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\left(\frac{3}{4} \dot{u}(x)^2\right)'}{1} \right|$$

$\frac{0}{0}$
 num. e denom. sono di classe C^1
 ($\dot{u} \notin C^1$, MA $\dot{u}^3 \in C^1$)

$$= \frac{3}{4} \dot{u}(x_0)^2 \neq 0$$

da cui l'assunto. Quindi $\dot{u}(x)$ non può essere α -Hölder con $\alpha > \frac{1}{3}$.

Oss. In generale se partivamo con $\int |\dot{u}|^p$ arrivavamo a $\dot{u}^{p-1} \in \text{lip}$ e quindi $\dot{u} \in \frac{1}{p-1}$ Hölder.

Estensione: provare a dimostrare

→ che $x_0 = 0$ è un p.to di minimo

→ che $x_0 = 0$ è l'unico p.to di min. di $u(x)$, posto che sia vero.

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u^2) dx : u(1) = \alpha > 0 \right\}$

$\uparrow$ variabile.

Parentesi: $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^4) dx : u(1) = \alpha > 0 \right\}$

In entrambi i casi il minimo esiste facile.

CLAIM $0 \leq u(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in [0, 1]$
 $0 < u(x) < \alpha$ per ogni $x \in [0, 1)$ ↑ Escluso

Il primo claim è facile in entrambi i casi (argomento di truncamento)

Il secondo claim dovrebbe essere ok nel 2° caso. Perché?
 ELE diventa

$$(2u)' = 4u^3 \quad \leadsto \quad u'' = 2u^3$$

Se esistesse $x_0 \in [0, 1)$ t.c. $u(x_0) = 0$, questo sarebbe un p.to di min., quindi $u'(x_0) = 0$. Ma allora u sarebbe soluzione del plem. di Cauchy (analisi 2)

$\begin{cases} u'' = 2u^3 \\ u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 0 \end{cases}$ Ma la sol. è unica e una la conosciamo
 (quella $\equiv 0$), che però non è la nostra.

Analogamente se esistesse $x_0 \in [0, 1)$ t.c. $u(x_0) = \alpha$, quello sarebbe un p.to di max, ma $u(x)$ è convessa ($u'' \geq 0$) e quindi non può avere p.ti di max in $(0, 1)$.

Non può nemmeno avere max per $x_0 = 0$ perché altrimenti $u'(x_0) = 0$ e le funzioni convexe stanno sopra ogni retta tangente. Dovrebbe quindi essere $u(x) \equiv \alpha$, che non risolve ELE,

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 26

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio precedente $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u^2) dx : u(1) = \alpha > 0 \right\}$

Domanda : È vero che $u(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$?

Brutal mode : ELE è $(4\dot{u}^3)' = 2u$ e un po' abusivamente
 $6\dot{u}^2\ddot{u} = u$

Una soluzione di questa si vede quasi a occhio. Condividiamo del tipo $u(x) = cx^a$. Allora $\dot{u}(x) = ca x^{a-1}$, $\ddot{u} = ca(a-1)x^{a-2}$ e quindi

$$6\dot{u}^2\ddot{u} = u \Leftrightarrow 6c^3a^2x^{2a-2}ca(a-1)x^{a-2} = cx^a$$

Uguaglio esponenti : $3a-4 = a \leadsto 2a = 4 \leadsto a = 2$

Uguaglio coeff : $6c^3a^3(a-1) = c \leadsto$ dato a trovo $c = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

Quindi $u(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} x^2$ è una soluzione di ELE.

Rigorous mode Se $\alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}}$, allora il unico p.to di minimo

è $u_0(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} x^2$. Basta usare che risolve ELE nella forma $(4\dot{u}^3)' = 2u$ e sfruttare la convessità della Lagrangiana!

Nota bene : nell'esempio con $\dot{u}^2$ i punti di minimo non potevano annullarsi NEMMENO per $x=0$.

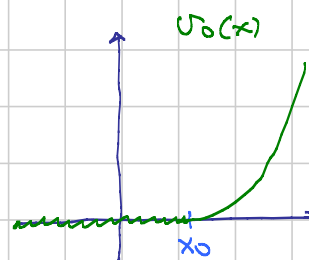
Nota pure : esistono almeno due sol. di ELE che verificano le condizioni di CAUCHY $u(0)=0$, $\dot{u}(0)=0$.

(Il guaio nasce dalla perdita di ELLITTICITÀ, cioè non poter ricavare $\ddot{u}$ da ELE)

Ancora più grave

Anche la funzione

$$v_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} (x-x_0)^2 & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$



risolve ELE. Di conseguenza, per ogni $x \in (0, \frac{1}{4\sqrt{3}})$ è lei (per x_0 opportuno) il p.to di minimo.

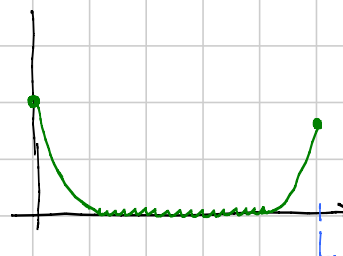
Dunque il p.to di min può essere nullo in un intero intervallo, cosa che nell'esempio con u^2 non era possibile.

Nota bene: anche in questo caso la soluzione non è C^2 , ma soltanto C^1 .

Esercizio min $\left\{ \int_0^L (u^4 + u^2) dx : u(0) = 2020, u(L) = 1937 \right\}$

Sembra ragionevole che, per L abbastanza grande, la soluzione vada a 0 su un intero intervallo

Idea: probabilmente si scrive esplicitamente usando le parabole precedenti.



Questo NON sarebbe possibile scambiando gli esponenti.

Esempio 2 (Ancora truncamenti e principi del massimo)

Consideriamo l'equazione $u'' = u^3 + 7 \sin t$

Consideriamo una soluzione definita per $x \in [0, 2\pi]$. Cosa possiamo dire del massimo / minimo della soluzione? Viene raggiunto al bordo o in un p.to interno?

Poniamo che le condizioni siano $u(0) = A$ e $u(2\pi) = B$.

Brutal mode: supponiamo $x_0 \in (A, B)$ p.to di min. della soluz.
Allora $u'(x_0) = 0$ e $u''(x_0) \geq 0$, ma allora

$$u(x_0)^3 + 7 \sin x_0 \geq 0, \text{ cioè}$$

$$u(x_0)^3 \geq -7 \sin x_0 \geq -7, \text{ cioè } u(x_0) \geq -\sqrt[3]{7}$$

Risultato

$$\min \{u(x) : x \in [0, 2\pi]\} \geq \min \{-\sqrt[3]{7}, u(0), u(2\pi)\}$$

$$\max \{u(x) : x \in [0, 2\pi]\} \leq \max \{\sqrt[3]{7}, u(0), u(2\pi)\}$$

Principi del massimo

Le disuguaglianze dovrebbero essere strette nel caso di max/min assunti in p.ti interni.

1° modo: dall'equazione] Ragionare come nel brutale per le disuguaglianze $\geq$ e $\leq$.

Vediamo quella stretta con $-\sqrt[3]{7}$. Intanto dovrebbe essere $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Abbandoniamo per un momento.

2° modo: dall'approccio variazionale] Se $u(x)$ risolve l'eq., allora è l'unico p.to di min di

$$F(u) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{4} u^4 + 7 \sin x \cdot u \right) dx$$

con DBC $u(0) = A$ e $u(2\pi) = B$.

Un argomento di truncamento dovrebbe dire che non conviene andare sotto $-\sqrt[3]{7}$. Questo è vero se c'è un risparmio sulla parte di funzione truncando a $-\sqrt[3]{7}$, cioè

$$\frac{1}{4} s^4 + 7 \sin x \cdot s \geq \frac{1}{4} 7^{4/3} - 7^{4/3} \sin x \quad \text{se } s < -\sqrt[3]{7}$$

Questo è vero perché, fissato $x \in [0, 2\pi]$, vale che la funzione

$$s \rightarrow \frac{1}{4} s^4 + 7 \sin x \cdot s$$

ha minimo quando $s^3 + 7 \sin x = 0$,
cioè

$$s = -\sqrt[3]{7 \sin x} > -\sqrt[3]{7}$$



Morale: le disuguaglianze del tipo "principio del max"
sono equivalenti ad argomenti di truncamento.

Domanda a cui pensare: disuguaglianze strette.

Esempio 3 Mostrare che l'equazione $\ddot{u} = u^3 + 7 \sin x$
ha un'unica soluzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ e
PERIODICA (N.B.: non sto dichiarando il periodo)

- ROAD MAP**
- ① Con il metodo variazionale trovo una soluzione con periodo 2π
 - ② Mostro che il periodo è necessariamente un multiplo di 2π
 - ③ Mostro che il periodo minimo è sempre e comunque 2π .

④ Risolvo $\min_{u \in C^1} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + 7 \sin x \cdot u \right) : u(0) = u(2\pi) \right\}$

Metodo diretto: esistenza, regolarità, e uscita su due
road della condizione $u(0) = u(2\pi)$
(e dall'equazione pure $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(2\pi)$)

Ripetendo per periodicità abbiamo una sol. periodica.

(Nota bene: se risolvevamo con BCs $u(0) = u(37)$ avevamo comunque esistenza e condizioni $\dot{u}(0) = \dot{u}(37)$, ma dall'equazione non ottenevamo $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(37)$ e non potevamo estendere replicando)
(Andava bene anche periodo 4π).

② Scritto $7 \sin x = \ddot{u} - u^3$, si vede che, se $u(x)$ è T periodica, allora lo è pure $\sin x$, quindi $T = 2k\pi$ con $k \geq 1$ intero.

③ Proviamo una soluzione di periodo 22π . Questa risolve ELE del problema variazionale con BC $u(0) = u(22\pi)$.

Per le solite storie di stretta convessità, questa è l'unica soluzione di ELE + PBC in $[0, 22\pi]$.

Ma noi una sol. già la conosciamo (è quella in $[0, 2\pi]$ ripetuta 11 volte).

Ma allora non esistono sol. esotiche che non siano quella del pto ① ripetuta.

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 27

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Identità del parallelogramma

In uno sp. vett. con prod. scalare definito positivo la norma soddisfa

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

somma $\square$ lunghezze diag.
= somma $\square$ lunghezze lati

per ogni x e y nello spazio.

Jordan - Fréchet - von Neumann In uno sp. normato V la norma deriva da un prod. scalare se e solo se vale l'identità del parall. In tal caso il prod. scalare è dato da

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4} \{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \} \quad \forall (x, y) \in V^2$$

Esercizio 1 Supponiamo che in uno sp. normato V valga una disuguaglianza del parallelogramma, ad esempio

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall (x, y) \in V^2$$

Allora in realtà vale sempre = (idem se posto con $\leq$)

Dim. Applico la disug. con $v = x+y$ e $w = x-y$

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 \geq 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

$$4\|x\|^2 + 4\|y\|^2 \geq 2\|x+y\|^2 + 2\|x-y\|^2$$

Semplificando un 2 e confrontando con l'ipotesi si ha la tesi.

Esercizio 2 Dimostrare JFN a partire dalla definizione

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2} \{ \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \}$$

[Tanti provano a dimostrarlo così all'esame, piantandosi :)]

Dim Step 1 Banalità

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Ok
- $\langle x, 0 \rangle = 0$ Ok
- $\langle -x, y \rangle$ da questa definizione per ora non si ottiene nulla
- $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ Ok

Step 2 In questa dim. c'è una sda cosa da ricordare: l'addiz. vità va fatta prima con il 2.

Dimostriamo che

$$\langle 2z, x+y \rangle = 2\langle z, x \rangle + 2\langle z, y \rangle$$

Scrivo la defn. per LHS e RHS

$$\frac{1}{2} \{ \|2z + x + y\|^2 - \|2z\|^2 - \|x+y\|^2 \} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \{ \|2z+x\|^2 - \|2z\|^2 - \|x\|^2 + \|2z+y\|^2 - \|2z\|^2 - \|y\|^2 \}$$

(2z+x) + (2z+y)

Usando il parallelogramma il LHS diventa

$$\frac{1}{2} \{ 2\|z+x\|^2 + 2\|z+y\|^2 - \underbrace{\|x-y\|^2}_{(2z+x)-(2z-y)} - 4\|z\|^2 - \|x+y\|^2 \}$$

$$= \|z+x\|^2 + \|z+y\|^2 - \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - 2\|z\|^2 - \frac{1}{2}\|x+y\|^2$$

$$\stackrel{?}{=} \|z+x\|^2 - \|z\|^2 - \|x\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z\|^2 - \|y\|^2 \leftarrow \text{vecchio RHS}$$

Ciò che resta è il parallelogramma con x e y :).

Step 3 Mettendo $y=0$ nello step 2 troviamo
 $\langle 2z, x \rangle = 2\langle z, x \rangle$ (posso portare fuori i 2)

A questo punto abbiamo che

$$2\langle z, x+y \rangle = \langle 2z, x+y \rangle = 2\langle z, x \rangle + 2\langle z, y \rangle$$

e semplificando il 2 abbiamo l'additività.

Step 4 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$

- conquistato $\lambda \in \mathbb{N}$ per inclusione usando l'additività
- conquistato $\lambda \in \mathbb{Z}$ usando che

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \lambda x + (-\lambda)x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle + \langle (-\lambda)x, y \rangle \\ &= \underbrace{\lambda \langle x, y \rangle}_{\text{porto al RHS}} + \langle (-\lambda)x, y \rangle \end{aligned}$$

- conquistato $\lambda \in \mathbb{Q}$ usando $\mathbb{Z}$. Se $\lambda = \frac{m}{n}$, allora

$$m \langle x, y \rangle = \langle m x, y \rangle = \langle n \cdot \frac{m}{n} x, y \rangle = n \underbrace{\langle \frac{m}{n} x, y \rangle}_{\text{porto fuori}}$$

Dividendo per n si ha la tesi.

Step 5 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Basta osservare che le 2 funzioni

$$\lambda \rightarrow \lambda \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad \lambda \rightarrow \langle \lambda x, y \rangle$$

sono continue e coincidono in $\mathbb{Q}$.

La continuità della prima è ovvia. Quella della seconda segue dalla continuità di $\lambda \rightarrow \|\lambda x\|$ e $\lambda \rightarrow \|\lambda x + y\|$

e questa segue dalla triangolare, tipo

$$\left| \underbrace{\|\lambda_1 x\|}_0 - \underbrace{\|\lambda_2 y\|}_0 \right| \leq \underbrace{\|\lambda_1 x - \lambda_2 x\|}_0 = |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|x\|.$$

Counterpositive Se voglio dimostrare che una norma non deriva da un prodotto scalare, basta esibire una violazione del parallelogramma.

Esempio 3 (Norme p -esime in $\mathbb{R}^2$). Per ogni $p \geq 1$ poniamo

$$\|(x, y)\|_p := \{ |x|^p + |y|^p \}^{1/p} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Si verifica che quella definita è una norma in $\mathbb{R}^2$

Nel caso $p = +\infty$ si pone

$$\|(x, y)\|_\infty := \max \{ |x|, |y| \} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Anche questa è una norma

Dim L'unica verifica non banale è la triangolare

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

cioè, ponendo $v = (x_1, y_1)$ e $w = (x_2, y_2)$,

$$\{ |x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p \}^{1/p} \stackrel{?}{\leq} \{ |x_1|^p + |y_1|^p \}^{1/p} + \{ |x_2|^p + |y_2|^p \}^{1/p}$$

Elevo alla potenza p :

$$|x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p = |x_1 + x_2|^{p-1} |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2|^{p-1} |y_1 + y_2|$$

$$\leq \underbrace{|x_1 + x_2|^{p-1}}_{\frac{p-1}{p}} |x_1|_{\frac{1}{p}} + \underbrace{|x_1 + x_2|^{p-1}}_{\frac{p-1}{p}} |x_2|_{\frac{1}{p}} + \underbrace{|y_1 + y_2|^{p-1}}_{\frac{p-1}{p}} |y_1|_{\frac{1}{p}} + \underbrace{|y_1 + y_2|^{p-1}}_{\frac{p-1}{p}} |y_2|_{\frac{1}{p}}$$

(Hölder)

$$\leq \{ |x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p \}^{\frac{p-1}{p}} \{ |x_1|^p + |y_1|^p \}^{\frac{1}{p}} + \{ |x_1 + x_2|^p + |y_1 + y_2|^p \}^{\frac{p-1}{p}} \{ |x_2|^p + |y_2|^p \}^{\frac{1}{p}}$$

Semplificando i due termini comuni del RHS si ottiene

$$\{|x_1+x_2|^p + |y_1+y_2|^p\}^{1/p} \leq \{|x_1|^p + |y_1|^p\}^{1/p} + \{|x_2|^p + |y_2|^p\}^{1/p}.$$

Osservazione Lo stesso trucco funziona con un qualunque numero di variabili, anche numerabile, cioè in ℓ^p .

La dimostrazione nel caso $p = +\infty$ è più semplice.

Serve $p \geq 1$ per poter usare Hölder.

Esercizio 4 Dimostrare che la norma p -esima in $\mathbb{R}^2$ deriva da un prodotto scalare se e solo se $p=2$.

Dim. Per $p=2$ lo sappiamo. Impostiamo il parallelogramma con $x=(1,0)$ e $y=(0,1)$

$$\begin{aligned} \|(1,1)\|_p^2 + \|(1,-1)\|_p^2 &= 2 \|(1,0)\|_p^2 + 2 \|(0,1)\|_p^2 \\ 2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} &= 4 \quad \leadsto \quad 2^{\frac{2}{p}+1} = 2^2 \quad \leadsto \quad \frac{2}{p} = 1 \quad \leadsto \quad p=2. \end{aligned}$$

Analogo per la norma ∞ .

Esercizio 5 Per quali spazi di misura (X, m, μ) si ha che $L^5(X, m, \mu)$ è uno sp. di Hilbert.

Se in X c'è sostanzialmente un unico insieme misurabile di misura positiva, allora L^5 è isomorfo ad $\mathbb{R}$ con la solita norma, che è uno spazio di Hilbert.

Se in X ci sono due insiemi disgiunti A e B di misura positiva, allora impostiamo il parallelogramma con le loro caratteristiche

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B\|_5^2 + \|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_5^2 &= 2 \|\mathbb{1}_A\|_5^2 + 2 \|\mathbb{1}_B\|_5^2 \\ 2 \{\text{meas}(A) + \text{meas}(B)\}^{\frac{2}{5}} &= 2 \{\text{meas}(A)\}^{\frac{2}{5}} + 2 \{\text{meas}(B)\}^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

che è impossibile, se sono entrambe positive (verifica!).

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 28

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Minimizzare la distanza da un chiuso e/o convesso

Esercizio 1 Sia (X, d) sp. metrico. Sia $C \subseteq X$ un chiuso $\neq \emptyset$.
Sia $x_0 \in X$.

Domanda: possiamo concludere che esiste

$$\min \{ d(x_0, x) : x \in C \} \quad ?$$

Oss. Se C non è chiuso ci sono banali controesempi.

Risposta 1 Supponiamo in aggiunta che le palle chiuse di X siano compatte. Allora la risposta è affermativa.

Dim. Idea: considero palla centrata in x_0 abbastanza grande da intersecare C . Allora la battaglia per il minimo si gioca in questa palla $\cap C$.



Rigoroso: prendo $x_1 \in C$ e pongo $R := \text{dist}(x_0, x_1)$.
Considero

$$C \cap B(x_0, R)$$

Questo è $\neq \emptyset$ (contiene x_1) ed è compatto (chiuso in un compatto). Essendo $x \mapsto d(x, x_0)$ continua (va dimostrato) deduciamo che esiste

$$\min \{ d(x, x_0) : x \in C \cap B(x_0, R) \}.$$

Sia x_m un p.to di minimo. Allora x_m è p.to di min. su tutto C .

→ Se $x \in C \cap B(x_0, R)$, allora $d(x, x_0) \geq d(x_m, x_0)$

→ Se $x \in C$ ma $x \notin B(x_0, R)$, allora

$$d(x, x_0) \geq R = d(x_1, x_0) \geq d(x_m, x_0). \quad \text{☺}$$

(>) ↑ $x_1 \in B(x_0, R) \cap C$

Risposta 2 Se non si assume la cpt. delle palle chiuse, la risposta può essere negativa!

Esempio (Addirittura in uno sp. di Hilbert)

Prendiamo un H separabile con base ortonormale $\{e_n\}$.

Consideriamo

$$C = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n : n \in \mathbb{N} \right\}$$

e $x_0 = 0$ (origine).

Claim: C è chiuso e il minimo della distanza non esiste.

→ min. non esiste perché $\text{dist}(x_0, (1 + \frac{1}{n})e_n) = 1 + \frac{1}{n}$
e non ha min.

→ C è chiuso perché ogni succ. di Cauchy a valori in C è definitivamente costante, dunque banalmente convergente ad un elemento di C .

Questo fatto segue da

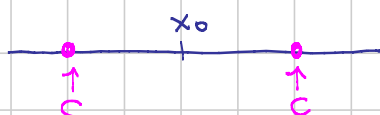
$$\text{dist}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)e_n, \left(1 + \frac{1}{m}\right)e_m\right) = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{2}$$

se $n \neq m$.

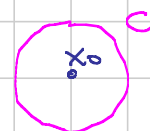
Morale: in dim. infinita la distanza di un p.to da un chiuso può non raggiungere il valore minimo.

Esercizio 2 Esistono facili esempi in cui il p.to di minima distanza NON è unico.

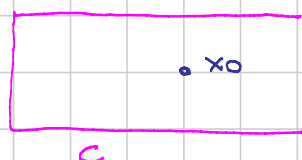
In $\mathbb{R}$



in $\mathbb{R}^2$



in $\mathbb{R}^2$



Quindi non è una questione di connessione

Esercizio 3 (Violazioni di unicità con C chiuso e convesso, ovviamente in spazi che non sono Hilbert).

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x,y)\|_1 := |x| + |y|$.

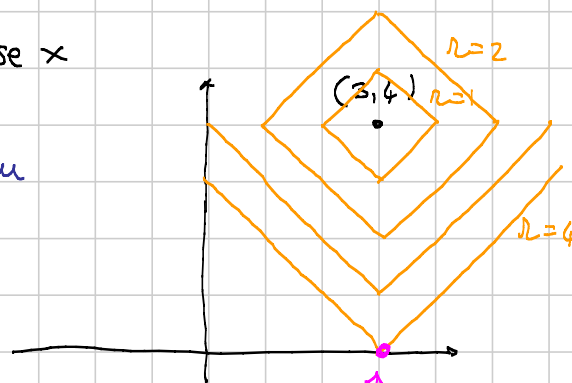
Il p.to di minima distanza da un chiuso esiste sempre

(basta osservare che $\mathbb{R}^2$ con la norma 1 ha le palle compatte, e questo segue dal fatto che tutte le norme in $\mathbb{R}^2$ inducono la stessa topologia essendo equivalenti $\leadsto$ Analisi 2).

Conduciamo il minimo con diverse scelte del chiuso e convesso

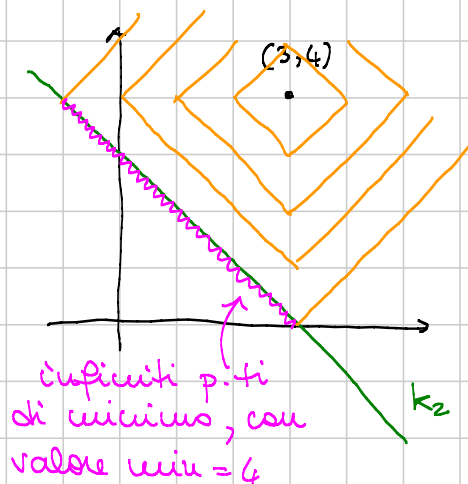
(a) $(x_0, y_0) = (3, 4)$ $k_1 = \text{Asse } x$

Considero le palle concentriche con centro in $(3, 4)$ e raggio crescente fino a toccare k_1 .



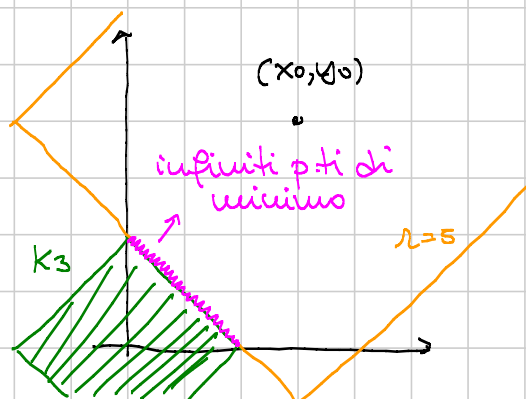
(b) $(x_0, y_0) = (3, 4)$
 $k_2 = \text{retta } x+y=3$
 $\uparrow$ chiuso e CONVESSO

Abbiamo ∞ p.ti di minimo



Achtung! Ci sono esempi di spazi di Banach in cui la distanza da un convesso chiuso esiste, ma il p.to di MINIMO non è unico.

(c) $(x_0, y_0) = (3, 4)$
 $k_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$
 (palla con centro $(0, 0)$ e raggio 2, quindi chiuso e convesso e pure compatto)



Morale: Per una unicITÀ, nel caso di C convesso, può avvenire solo se "il bordo della palla contiene dei segmenti".

Potremmo definire una norma strettamente convessa se

$$\|x\| = 1, \|y\| = 1, x \neq y \Rightarrow \|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

$x \neq y$ stanno sul bordo della palla

il segmento congiungente sta dentro

Esercizio 4 Se una norma è strett. convessa, allora il p.to di min. distanza da un chiuso convesso, posto che esista, è necessariamente unico.

Idea! se due punti hanno la stessa distanza R da un certo x_0 , allora il loro p.to medio sta ancora nel convesso e dista da x_0 meno di R .

Esercizio 5 Quali norme p -esime in $\mathbb{R}^2$, o più in generale in $\mathbb{R}^n$ o in ℓ^p , hanno la proprietà di stretta convessità?

Tutte, tranne quelle con $p=1$ oppure $p=+\infty$. Basta dim. che $|x_1|^p + |y_1|^p = 1$ e $|x_2|^p + |y_2|^p = 1$, allora $|\frac{x_1+x_2}{2}|^p + |\frac{y_1+y_2}{2}|^p < 1$. Questo dovrebbe seguire dalla stretta convessità di $x \rightarrow x^p$.

Infatti, se $x_1 \neq x_2$ (e wlog questo è vero)

$$\left| \frac{x_1+x_2}{2} \right|^p < \frac{|x_1|^p + |x_2|^p}{2} \quad \left| \frac{y_1+y_2}{2} \right|^p < \frac{|y_1|^p + |y_2|^p}{2} \quad \left. \vphantom{\left| \frac{x_1+x_2}{2} \right|^p} \right\} \text{ sommando segue la tesi}$$

Oss. Nella terza parte del corso si ritorna sulla questione ESISTENZA del p.to di min. distanza (o di almeno un p.to).

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 29

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

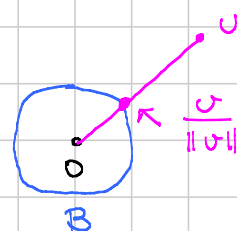
Note Title

06/10/2020

Esercizio 1 Sia V uno spazio normato, e sia B la palla unitaria chiusa (e convessa) con centro nell'origine. Allora per ogni $v \in V$ esiste un elemento in B che minimizza la distanza da v , e questo elemento è

$$P_B(v) := \begin{cases} v & \text{se } \|v\| \leq 1 \\ \frac{v}{\|v\|} & \text{se } \|v\| \geq 1 \end{cases}$$

(occhio: non è detto che $P_B(v)$ sia l'unico p.to che minimizza la distanza da v (vedi lezione precedente))



Dim. Se $\|v\| \leq 1$ è ovvio. Quindi supponiamo $\|v\| > 1$.
Devo verificare che

$$\|v - P_B(v)\| \leq \|v - w\| \quad \forall w \in B$$

$$\|v - \frac{v}{\|v\|}\| \stackrel{?}{\leq} \|v - w\|$$

$$\underbrace{\left(1 - \frac{1}{\|v\|}\right)}_{>0} \|v\| \stackrel{?}{\leq} \|v - w\| \rightsquigarrow \|v\| - 1 \stackrel{?}{\leq} \|v - w\|$$

Questa è vera perché $\|v - w\| \geq \|v\| - \|w\| \geq \|v\| - 1$
 $\uparrow$
 $\|w\| \leq 1$

Esercizio 2 Dimostrare che la proiezione P_B è 2-lip, cioè

$$\|P_B(v) - P_B(w)\| \leq 2\|v - w\| \quad \forall (v, w) \in V^2$$

Dim. Se v e w stanno in B è ovvio

Supponiamo siano entrambi fuori, cioè $\|v\| > 1$ e $\|w\| > 1$.

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} \right\| \stackrel{?}{\leq} 2 \|v - w\| ;$$

$$\| \|w\|v - \|v\|w \| \stackrel{?}{\leq} 2 \|v - w\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$$

$$\| \|w\|v - \|v\|w \| = \| \|w\|v - \|v\|v + \|v\|v - \|v\|w \|$$

$$\leq \| (\|w\| - \|v\|) v \| + \| \|v\| (v - w) \|$$

$$\leq \underbrace{\| \|w\| - \|v\| \| \cdot \|v\|}_{\leq \|w - v\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|} + \underbrace{\|v\| \cdot \|v - w\|}_{\leq \|v\| \cdot \|v - w\| \cdot \|w\|}$$

Resta da fare il caso in cui, WLOG, $\|v\| \leq 1$ e $\|w\| > 1$ e questo si dovrebbe fare in modo del tutto analogo (FARLO!).

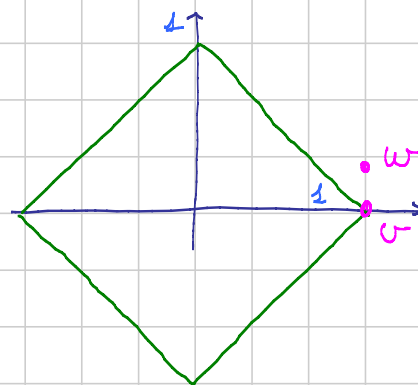
Oss. Se $v \neq w$, la disuguaglianza è in realtà stretta.

Esercizio 3 Esistono dei casi in cui P_B non è L -lipschitz con $L < 2$!!!

Dim. Basta prendere $\mathbb{R}^2$ con norma 1.

Prendiamo $v = (1, 0)$ e $w = (1, \varepsilon)$
(siamo dalle parti dell'angolo della palla)

Allora



$$P_B(v) = (1, 0) \quad P_B(w) = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \quad \|v - w\| = \varepsilon$$

$$\|P_B(v) - P_B(w)\| = \left| 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} \right| + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \stackrel{?}{\leq} L \varepsilon$$

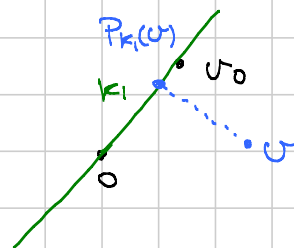
Facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$ si vede che deve essere $L \geq 2$.

Curiosità Se dimensione $(V) \geq 3$, allora P_B è 1-lip se e solo se la norma deriva da un prodotto scalare !!

Esercizio 4 Sia H uno spazio di Hilbert (forse basta anche pre-Hilbert, cioè con prod. scalare ma non nec. completo). Sia $v_0 \neq 0$ un el. di H .
Determinare la proiezione sui seguenti convessi chiusi.

(a) $K_1 = \text{Span}(v_0)$

Idea: $P_{K_1}(v) =$ proiezione ortogonale di v su K_1



Claim: $P_{K_1}(v) = \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0$ (osserviamo che $\in K_1$ e che se cambio v_0 con γv_0 non cambia nulla)

Usando la caratt. deve essere

$\langle v - P_{K_1}v, w - P_{K_1}v \rangle \leq 0$ per ogni $w \in K_1$
 $\uparrow$ anche = poiché K_1 è s.sp. vettoriale

Posto $w = \alpha v_0$, devo verificare

$$\langle v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, \alpha v_0 - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \rangle \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$\left(\alpha - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right) \langle v, v_0 \rangle$$

$$\left(\alpha - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right) \langle v, v_0 \rangle - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \left(\alpha - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right) \langle v_0, v_0 \rangle \stackrel{?}{\leq} 0$$

Giustamente vale il segno di =. 😊

(b) $K_2 := \text{Span}(v_0)^\perp = \{ w \in H : \langle w, v_0 \rangle = 0 \}$

Claim: $P_{K_2}(v) = v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0$ $\swarrow$ proiezione ortogonale di v su K_2

Devo verificare la relazione di prima $\forall w \in K_2$

$$\langle v - P_{K_2} v, w - P_{K_2} v \rangle \leq 0 \quad (\text{in realtà } =)$$

$$\left\langle \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, w - v + \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \right\rangle \leq 0$$

$$\frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \left\{ \underbrace{\langle v_0, w \rangle}_{=0} - \langle v_0, v \rangle + \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \cancel{\langle v_0, v_0 \rangle} \right\} = 0 \quad \text{☺}$$

(c) $K_3 := \{ w \in H : \langle w, v_0 \rangle = 7 \}$ (ripetiamo // al precedente)

$$\text{Claim: } P_{K_3}(v) = v - \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 + 7 \frac{v_0}{\|v_0\|^2}$$

Vediamo intanto (anzi dovute verificarlo pure prima) che $P_{K_3}(v) \in K_3$:

$$\begin{aligned} \langle P_{K_3}(v), v_0 \rangle &= \cancel{\langle v, v_0 \rangle} - \frac{\cancel{\langle v, v_0 \rangle}}{\|v_0\|^2} \cancel{\langle v_0, v_0 \rangle} + \frac{7 \cancel{\langle v_0, v_0 \rangle}}{\|v_0\|^2} \\ &= 7 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Ora verifichiamo che

$$\langle v - P_{K_3}(v), w - P_{K_3}(v) \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K_3$$

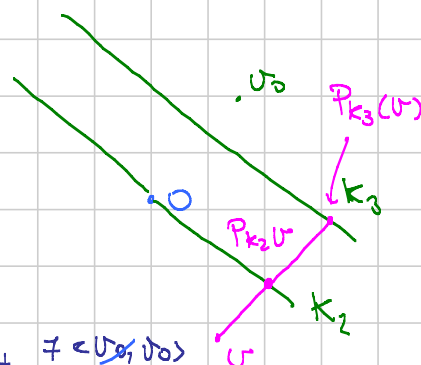
↑ anche ora = 0 perché K_3 è comunque uno spazio affine

$$\left\langle \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 - 7 \frac{v_0}{\|v_0\|^2}, w - v + \frac{\langle v, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 - 7 \frac{v_0}{\|v_0\|^2} \right\rangle \leq 0$$

$$\frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} v_0 \quad \frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} v_0$$

$$\frac{\langle v, v_0 \rangle - 7}{\|v_0\|^2} \left\{ \underbrace{\langle v_0, w \rangle}_{=7} - \cancel{\langle v_0, v \rangle} + \frac{\cancel{\langle v, v_0 \rangle} - 7}{\|v_0\|^2} \cancel{\langle v_0, v_0 \rangle} \right\} = 0 \quad \text{☺}$$

Provare con $K_4 := \{ w \in H : \langle w, v_0 \rangle \leq 7 \}$.



Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 30

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio 1 Chiamiamo *cono convesso* un sottoinsieme $K \subseteq H$ (supponiamo H sp. di Hilbert, ma la definizione si può dare in un qualunque sp. vett. V) con la proprietà che

$$\forall v \in K \quad \forall w \in K \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \mu > 0 \quad \lambda v + \mu w \in K$$

(non chiedo $\lambda + \mu = 1$)

Supponiamo che K sia chiuso.

Allora $\forall v \in H$ esiste $P_K v$ ed è caratterizzato dalle seguenti due proprietà

$$(i) \quad \langle v - P_K v, P_K v \rangle = 0$$

$$(ii) \quad \langle v - P_K v, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$

Dalla figura sembrano ragionevoli

$P_K(v)$ verifica (i) e (ii)

Dalla teoria generale sappiamo che

$$\langle v - P_K v, w - P_K v \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$

Ponendo $w = 0$ (e posso) ottengo $\langle v - P_K v, P_K v \rangle \geq 0$

Ponendo $w = 2P_K v$ (e posso) ottengo $\langle v - P_K v, P_K v \rangle \leq 0$

Questo dimostra la (i). A questo p.to la (ii) è un corollario.

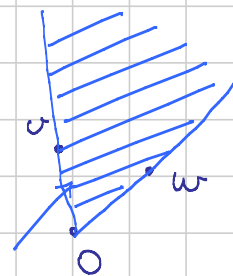
Se z verifica (i) e (ii), allora $z = P_K(v)$

Ipotesi: $\langle v - z, z \rangle = 0$

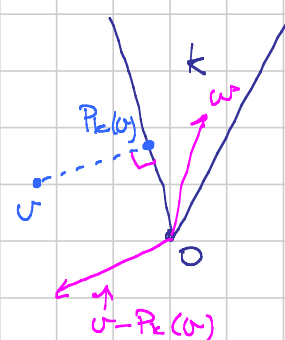
$$\langle v - z, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in K$$

$$\text{Tezi: } \|v - z\|^2 \leq \|v - w\|^2$$

$$\forall w \in K$$



appena ci sono v e w , c'è tutta la zona tratteggiata



$$\begin{aligned}
 \|v-w\|^2 &= \|(v-z) + (z-w)\|^2 \\
 &= \|v-z\|^2 + \|z-w\|^2 + 2\langle v-z, z-w \rangle \\
 &= \|v-z\|^2 + \underbrace{\|z-w\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\langle v-z, z \rangle}_{=0} - \underbrace{2\langle v-z, w \rangle}_{\geq 0} \\
 &\geq \|v-z\|^2 \quad \ddot{\smile}
 \end{aligned}$$

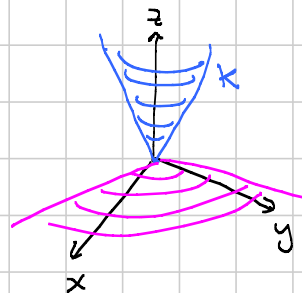
Esercizio 2 Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ il cono chiuso e convesso ↑ verifica!

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, z^2 \geq 2(x^2 + y^2)\}$$

Determinare i p.to $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tali che $P_K(x_0, y_0, z_0) = 0$.

L'origine deve verificare (i) e (ii) come sopra. Ora (i) è ovvia, mentre (ii) è equivalente a

$$\begin{aligned}
 \langle (x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \rangle &\leq 0 \quad \forall (x, y, z) \in K \\
 \text{"} & \\
 x_0 x + y_0 y + z_0 z &\leq 0
 \end{aligned}$$

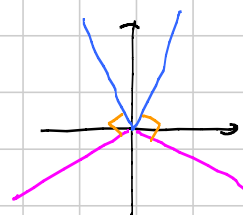


Scegliendo $(x, y, z) = (0, 0, 1) \in K$ scopriamo che $z_0 \leq 0$.

Scegliendo $(x, y, z) = (x_0, y_0, \sqrt{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}) \in K$ scopriamo che

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} z_0 \leq 0$$

da cui $\sqrt{2} z_0 \leq -\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ e quindi ($z_0 \leq 0$)



$$2z_0^2 \geq x_0^2 + y_0^2 \quad (\Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \text{cono con } z \text{ negativi e apertura "reciproca"})$$

Fino a qui abbiamo proceduto per cond. necessarie. Resta da verificare che ogni (x_0, y_0, z_0) con $z_0 \leq 0$ e $2z_0^2 \geq x_0^2 + y_0^2$ ha come

proiezione d'origine, il che equivale a dirlo che ha prodotto scalare negativo con ogni elemento di K .

$$\begin{aligned}
 x x_0 + y y_0 + z z_0 &\leq x x_0 + y y_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} z \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad z \geq 0 \\
 &\quad z_0 \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\dots} \\
 &\leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} z \\
 &\quad \text{C-S.} \uparrow \\
 &= \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \sqrt{x^2 + y^2} - z \right\} \leq 0 \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{per defn. di } K.
 \end{aligned}$$

Esempio 3 $H = L^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ (ma è uguale in uno spazio di misura)

Scegliamo ψ e φ in H con $\psi(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega$ e definiamo

$$K := \{g \in L^2(\Omega) : \psi(x) \leq g(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega\}$$

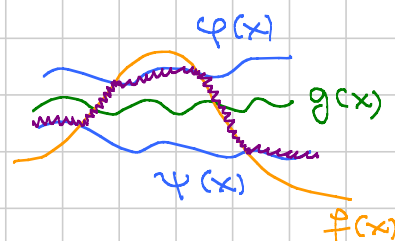
$\uparrow$ sarebbe quasi ogni...

Si verifica che K è convesso (facile esercizio da fare).

Determinare $P_K f$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$

Chi sarà la proiezione di $f(x)$?

Se c'è una logica si tratta del troncamento



Claim:

$$P_K f(x) = \hat{f}(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } f(x) \geq \varphi(x) \\ f(x) & \text{se } \psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) \\ \psi(x) & \text{se } f(x) \leq \psi(x) \end{cases}$$

Come lo verifico? Ad esempio usando la caratterizzazione.

Chiamo Ω_+ , Ω_0 e Ω_- i 3 insiemi in cui $\hat{f}(x)$ vale

φ , f , ψ .

Devo verificare che

$$\langle f - \hat{f}, g - \hat{f} \rangle \leq 0 \quad \forall g \in K, \text{ cioè } \int_{\Omega} (f - \hat{f})(g - \hat{f}) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dots &= \underbrace{\int_{\Omega_+} \underbrace{(f - \hat{f})}_{\geq 0} \underbrace{(g - \hat{f})}_{\leq 0}}_{\leq 0} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \underbrace{(f - \hat{f})}_{=0} \underbrace{(g - \hat{f})}_{=0}}_{=0} + \underbrace{\int_{\Omega_-} \underbrace{(f - \hat{f})}_{\leq 0} \underbrace{(g - \hat{f})}_{\geq 0}}_{\leq 0} \\ &\leq 0 \quad \text{☺} \end{aligned}$$

Esempio 4 $L^2(\Omega)$ come prima, $A \subseteq \Omega$ misurabile

$$K := \{ g \in L^2(\Omega) : g(x) \geq 0 \quad \forall x \in A \} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{verificare che è} \\ \text{un convesso chiuso} \end{array}$$

Determinare $P_K f$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$.

La convessità è quasi ovvia. La chiusura segue dal fatto che ogni succ. che converge in L^2 ammette s.succ. che converge puntualmente q.o., e questa convergenza conserva le disug. (o forsebbe debole senza passare alle s.successioni).

Chi sarà mai la proiezione?

$$(P_K f)(x) = \hat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin A \\ f(x) & \text{se } x \in A \text{ e } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \in A \text{ e } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

È ovvio che $\hat{f} \in A$. Verifichiamo che $\int_{\Omega} (f - \hat{f})(g - \hat{f}) \leq 0$ per ogni $g \in K$.

Chiamiamo $A_- = \{x \in A : f(x) \leq 0\}$. Allora

$$\int_{\Omega} \dots = \underbrace{\int_{\Omega \setminus A^-} (\underbrace{f - \hat{f}}_{=0})(g - \hat{f})}_{=0} + \underbrace{\int_{A^-} (\underbrace{f - \hat{f}}_{\leq 0})(\underbrace{g - \hat{f}}_{\geq 0})}_{\leq 0} \leq 0$$

Esempio 5 $H = L^2((0,2))$ e prendiamo

$$K := \left\{ g \in L^2((0,2)) : \int_0^1 g(x) dx = 7 + \int_1^2 g(x) dx \right\}$$

Si verifica che in entrambi i casi K è un convesso chiuso

Domanda: determinare $P_K f$ per ogni $f \in H$.

A occhio non si vede subito... pensarci ancora... pensare in astratto...

La condizione si scrive come

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx - \int_1^2 g(x) dx &= 7 \quad (\text{o con disuguaglianza}) \\ &= \int_0^2 g(x) \varphi(x) dx \quad \text{dove} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0,1) \\ -1 & \text{se } x \in (1,2) \end{cases} \\ &= \langle g, \varphi \rangle \end{aligned}$$

Quindi siamo nel caso di $K =$ iperpiano affine, trattato in una lezione precedente !!!

— o — o —

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 31

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

RUOLO DELLA CONVESSITÀ in P

Esempio 1 $F(u) := \int_0^1 \{ \dot{u}^2 + \arctan(u^2) \} dx$

$$G(u) := \int_0^1 \{ \dot{u}^2 - \arctan(u^2) \} dx$$

→ minimizzazione senza ulteriori condizioni

Banale per $F(u)$: il min = 0 e p.to di min. $u(x) \equiv 0$.

Banale per $G(u)$: min N.E. e $\sup = -\frac{\pi}{2}$ con possibile succ. infizzante $u_n(x) \equiv n$

Se applicassimo il metodo diretto: con $F(u)$ funzionava bene, con $G(u)$ da $G(u_n) \leq M$ ottenevamo $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$ (qui serve $L(x,s,\varphi) \geq \varphi^2 - \frac{\pi}{2}$). L'assenza di DBC non ci permetteva di avere $\|u_n\|_{L^\infty}$ che serve per immescone A.A.

→ minimizzazione con DBC $u(0)=7$.

In entrambi i casi il minimo esiste per il metodo diretto.

Esempio 2 $F(u) = \int_0^1 \{ \arctan(\dot{u}^2) + u^2 \} dx$

$$G(u) = \int_0^1 \{ \arctan(\dot{u}^2) - u^2 \} dx$$

→ minimizzazione senza altre condizioni

Banale per F : $u(x) \equiv 0$ è l'unico p.to di min.

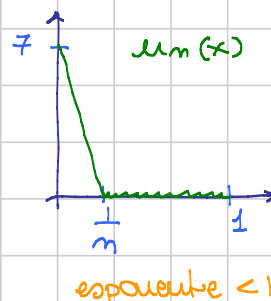
Banale per G : $\inf = -\infty$ con succ. infizz. $u_n(x) \equiv n$.

(Domanda: dove si pianta il metodo diretto?)

→ minimizzare con DBC $u(0) = 7$

Banale per G : $\inf = -\infty$ con succ. infiz. $u_n(x) = 7 + nx$

Nel caso di F abbiamo $\inf = 0$ (meno non si può di certo) con succ. infiz. come in figura (o volendo anche più regolare)



Idea: La derivata è enorme in un intervallo piccolo, ma l'arctan la fa pagare molto poco.

Oss. lo stesso fenomeno valeva per $\hat{F}(u) := \int_0^1 |u'|^{1/2} + u^2$
(La Lagrangiana ha problemi di CRESCITA e di CONVESSITÀ)

La CRESCITA la usiamo sempre per avere compattezza.

La CONVESSITÀ di $L(x, s, p)$ in p per avere SCL.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^1 \{ \arctan(u')^2 + (u-x)^2 \} dx : u \in C^1([0,1]) \right\}$

Analisi brutale: $u(x)$ vorrebbe essere circa x e avere derivata ~ 0 .
Detta così sembra impossibile, ma la mancata convessità lo rende possibile !!!

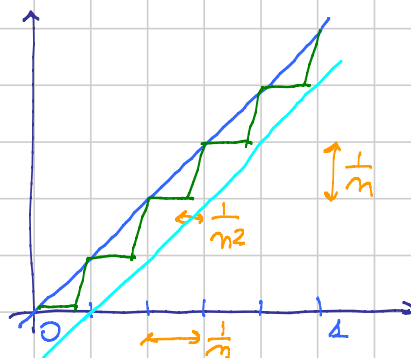
CLAIM $\inf = 0$. Di meno non può essere, quindi basta trovare una succ. infiz.

L'idea che ci sta sotto è quella della **DOPPIA SCALA**

Vogliamo delle $u_n(x)$ che siano circa x e con la derivata un po' o e un po' molto grande.

Saliti su scala $\frac{1}{n}$

Saliti su scala $\frac{1}{n^2}$



L'espressione di $u_n(x)$ in ogni singolo tratto si può scrivere esplicitamente, ma i pti essenziali sono che

- $x - \frac{1}{n} \leq u_n(x) \leq x$ per ogni $x \in [0, 1]$
- $\ddot{u}_n(x) = n$ in n tratti, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{n^2}$
- $\ddot{u}_n(x) = 0$ altrimenti.

Di conseguenza

$$\int_0^1 \arctan(\ddot{u}^2) dx \leq \frac{\pi}{2} \cdot n \cdot \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

↑ numero tratti
↓ stima basale per arctan
↑ lungh. singolo tratto

$$\int_0^1 (u-x)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{n}\right)^2 dx \rightarrow 0$$

Quindi $u_n(x)$ è infinitesimale.

Brutalmente: visto che $\arctan$ è non convessa, se voglio salire di un qualunque tratto mi conviene stare praticamente sempre fermo, e poi salire tutto in un colpo in un intervallo piccolissimo.

Esempio 4 $F(u) := \int_0^1 \ddot{u}(x)^3 dx$

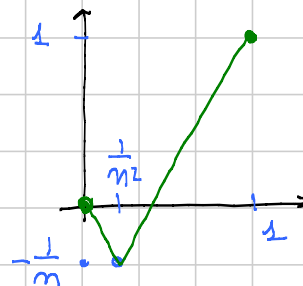
$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = 1 \}$$

Se scrivo ELE trovo $(3\ddot{u}^2)' = 0$, cioè $6\ddot{u}\ddot{\ddot{u}} = 0$, e posso notare che $u(x) = x$ è una soluzione di ELE.

Tuttavia, min N.E. e $\inf = -\infty$.

Se voglio andare a $-\infty$ devo scendere e poi risalire. Però salendo pago.

Idea: scendere brutalmente e poi salire dolcemente!



In un tratto lungo $\frac{1}{n^2}$ la derivata è $-n$.

In un tratto lungo $(1 - \frac{1}{n^2})$ la derivata è $\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}$

Facendo il conto otteniamo

$$\underbrace{\frac{1}{n^2} (-n^3)}_{-n} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}}\right)^3}_{\sim 1} \rightarrow -\infty$$

In questa costruzione, siamo stati arbitrariamente vicini a $u(x) = x$, anzi la $u_n(x)$ approssimante tende uniform. a x !!!
(Il problema è che le derivate non hanno limite in sensi che permettano di passare al limite nel funzionale)

Domanda: esistono dei p per cui $u_n(x)$ ammette limite debole in $L^p((0,1))$?

$\rightarrow \min \{F(u) : u(0) = 0, u(1) = 1, u'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in [0,1]\}$
 $\uparrow$ elimina la costruzione prec.

CLAIM In questo caso il minimo esiste e la retta $u(x) = x$ è l'unico pto di minimo.

La dimostrazione si fa considerando il funzionale ausiliario

$$G(u) := \int_0^1 |u'|^3 dx$$

Detta $u_0(x) = x$ la retta, per ogni competitor u vale che

$$F(u) \geq G(u) \geq G(u_0) = F(u_0)$$

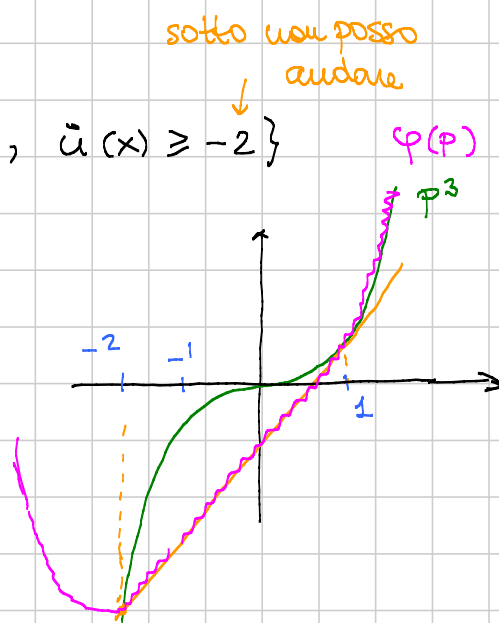
$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $|u_0| = u_0$ per la retta
 vale con = la retta è p.to di minimo
 perché ci per $G(u)$ essendo soluzione di ELE
 siamo ristretti + convessità della Lagrangiana
 alle $u \geq 0$

Fino a dove posso spingermi?

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = 1, \ddot{u}(x) \geq -2 \}$$

CLAIM La retta è l'unico p.to di minimo!

Fatto importante: la tangente in $p=1$ a p^3 , cioè $3p-2$, incontra nuovamente p^3 in $p=-2$



Considero una funzione $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa tale che

$$\varphi(p) = p^3 \quad \text{per } p \geq 1$$

$$\varphi(p) = 3p-2 \quad \text{per } p \in [-2, 1]$$

Poniamo

$$G(u) := \int_0^1 \varphi(\ddot{u}) dx$$

e vediamo che come prima

$$F(u) \geq G(u) \geq G(u_0) = F(u_0)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $p^3 \geq \varphi(p)$ per ogni $p \geq -2$ convessità di φ + ELE risolta $p^3 = \varphi(p)$ quando $p=1$

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 32

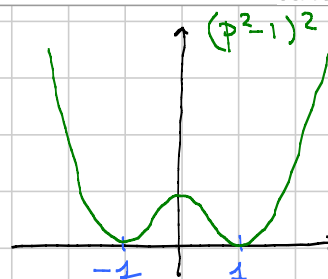
Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $F(u) := \int_0^1 (\dot{u}^2 - 1)^2 dx$

Il doppio pozzo ha CRESCITA non CONVESSITÀ.



$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 0, u(1) = 2 \}$

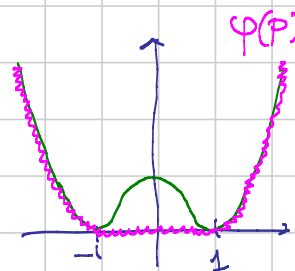
Osserviamo che la retta $u_0(x) = 2x$ risolve ELE

$$(2(\dot{u}^2 - 1)2\dot{u})' = 0 \quad (\dot{u}^3 - \dot{u})' = 0 \quad 3\dot{u}^2\ddot{u} - \ddot{u} = 0$$

CLAIM La retta $u_0(x)$ è l'unico p.to di min.
Si dimostra introducendo

$$G(u) := \int_0^1 \varphi(\dot{u}) dx$$

dove φ "convensifica" il doppio pozzo.
L'argomento è il solito.



$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = u(1) = 0 \}$

CLAIM La retta $u_0(x) \equiv 0$ risolve ELE, ma non è il p.to di minimo. Infatti $\inf = 0$, il min N.E. in C^1 , ma esiste negli spazi di Sobolev (ad esempio in H^1 o anche in $W^{1,p}$) ed è realizzato ad esempio (ma non solo) da $u(x) = |x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}$ (ha sempre derivata ± 1)

Esistono anche p.ti di min più creativi, con più "angoli".

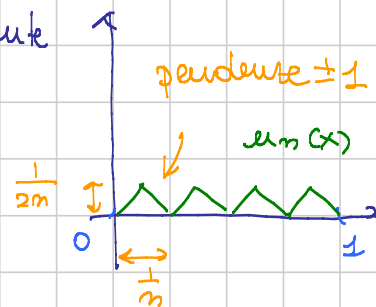


$$\rightarrow \min \left\{ F(u) + \int_0^1 u^2 \text{ senza altre condizioni} \right\}$$

Idea: u vorrebbe essere circa $=0$, e avere derivata ± 1 .

Niente di più facile 😊

CLAIM $\inf = 0$. Una successione infittante si ottiene "infittendo la seghettina triangolare" come in figura



Nota bene: in questo esempio

$$u_m(x) \rightarrow 0 \text{ uniforme.}$$

$$\dot{u}_m(x) \rightarrow 0 \text{ debole } L^2 \text{ e non solo (e anche in tutti i possibili sensi deboli)}$$

Se applico il metodo diretto

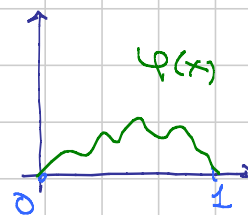
→ tutto ok in fase di compattanza (la crescita di $(\phi^2 - 1)^2$ mi garantisce $F(u_m) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_m\|_{L^4} \leq M'$
 $\uparrow$ anche L^2)

e una DBC basta per rintracciare AA)

→ grossi problemi di SCI per colpa della mancanza di convessità. (mancava anche nel primo scenario, e questo non impediva al min. di esistere)

Esempio 2 $F(u) = \int_0^1 \{ \dot{u}^2 + u^3 \} dx$

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = u(1) = 0 \}$$



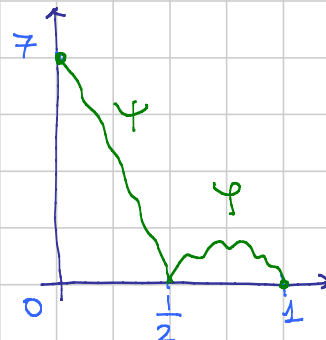
Banale $\inf = -\infty$. Prendo una qualunque $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 1)$ e pongo $u_m(x) := -m \varphi(x)$

$$F(u_m) = m^2 \int_0^1 \dot{\varphi}^2 - \underbrace{(m^3)}_{\text{comanda}} \int_0^1 \varphi^3 dx \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 7, u(1) = 0 \}$$

Anche in questo caso $\inf = -\infty$, sempre per colpa del cubo che batte il quadrato.

Scegliamo $\psi: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ qualunque con $\psi(0) = 7$ e $\psi(\frac{1}{2}) = 0$.



Scegliamo $\varphi: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi(x) > 0$ in $(\frac{1}{2}, 1)$.

Poniamo

$$u_m(x) := \begin{cases} \psi(x) & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -m\varphi(x) & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Questa è un competitore ammissibile (in H^1 , ma scegliendo bene ψ e φ pure in C^∞) e vale

$$F(u_m) = \int_0^1 \{ \dot{\psi}^2 - \psi^3 \} dx + m^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \dot{\varphi}^2 dx - \underbrace{m^3 \int_{\frac{1}{2}}^1 \varphi^3 dx}_{\text{costante}} \rightarrow -\infty$$

$$\rightarrow \min \{ F(u) : u(0) = 7, \underbrace{\int_0^1 u^4 \leq 1} \}$$

↑
impedisce a $\int_0^1 u^3$ di diventare troppo negativo

$$\left| \int_0^1 u^3 \right| \leq \int_0^1 |u|^3 \leq \left\{ \int_0^1 u^4 \right\}^{3/4}$$

↑
Hölder con $\pm$ nascosto

CLAIM Il minimo esiste, e tutti i pti di min. sono di classe C^∞ .

La dimostrazione si fa con il metodo diretto

→ Formulazione debole in $H^1(0,1)$ con DBC e $\int_0^1 u^4 \leq 1$

→ Compattezza : da $F(u_n) \leq M$ deduciamo che

$$M \geq F(u_n) = \int_0^1 \dot{u}_n^2 + \int_0^1 u_n^3$$

$$\geq \int_0^1 \dot{u}_n^2 - \int_0^1 |u_n|^3$$

Hölder di prima $\rightarrow \geq \int_0^1 \dot{u}_n^2 - \left\{ \int_0^1 u_n^4 \right\}^{3/4}$

vincolo integrale $\rightarrow \geq \int_0^1 \dot{u}_n^2 - 1$

$$\leadsto \int_0^1 \dot{u}_n^2 dx \leq M+1 \text{ e a meno di s.succ. } \dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$$

Usando ora o la DBC o il teorema della media integrale con il vincolo $\int_0^1 u_n^4 \leq 1$ deduciamo che $|u_n(x)| \leq M^1$ per ogni n e ogni $x \in [0,1]$

il che rinverca A.A.

Quindi a meno di s.succ.

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif. e } \dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ debde } L^2$$

Ora basta osservare che DBC e vincolo integrale passano al limite.

→ SCI è completamente standard.

→ Regolarità : standard per i pti di min $u_0(x)$ che verificano

$$\int_0^1 u_0(x)^4 < 1$$

$\uparrow$ stretto

$F(u_0 + \tau v)$ verifica la stessa cond. per τ piccolo e vede avanti

Se invece $\int_0^1 u_0(x)^4 = 1$ (cioè moralmente sono "sul bordo" dell'insieme di definizione)

non funziona più quanto detto sopra, perché $u_0 + t v$ potrebbe non essere un competitor ammissibile per $t \neq 0$.

Bordo = moltiplicatori di Lagrange (con vincolo $G(u) = \int_0^1 u^4$)

Dalla teoria sappiamo che, sotto opportune ipotesi di regolarità (qui banali perché Lagrangiane sono regolari) ci sono due scenari

1° $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni v ammissibile (basta C_c^∞)

$\leadsto 0 = 3u^3$ (ELE di G) $\leadsto u \equiv 0$ e non soddisfa il vincolo.
 $(L_p)' = L_s$

2° Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v)$ per ogni v ...
 o equivalentemente $\delta(F - \lambda G)(u_0, v) = 0$.

Con i calcoli conti si arriva prima a

$$\int_0^1 (2 \dot{u}_0 \dot{v} + 3 u_0^2 v) = \lambda \int_0^1 4 u_0^3 v$$

e questo per definizione di derivata debole equivale a

$$(2 \dot{u}_0)' = -3 u_0^2 + 4 \lambda u_0^3$$

e da qui è bootstrap fino a C^∞ (dopo aver usato la compatibilità classica.

— 0 — 0 —