

L'ESEMPIO DEGLI ESEMPI DEGLI ESEMPI

DIRICHLET LAPLACIAN (Per ora in dimensione 1)

Consideriamo $H: L^2((0, \pi))$. Consideriamo l'operatore

$$I: H \rightarrow H$$

che consiste nel fare due volte la primitiva con DBC. In altre parole, ad ogni $f \in L^2((0, \pi))$ associamo la funzione $u \in L^2((0, \pi))$ tale che

$$\begin{cases} u'' = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

(Brutalmente: I è l'inverso del Laplaciano con DBC)

[1] Intanto è ben definito, cioè $\forall f \in L^2$ esiste unica $u \in L^2$ che risolve.

Dim. esistenza 1

Analisi quasi 1: poniamo

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt$$

$$\hat{F}(x) := \int_0^x F(s) ds$$

e poi poniamo $u(x) = \hat{F}(x) + a + bx$, scegliendo a e b in modo da rispettare DBC.

Dim. esistenza 2

Formulazione variazionale via prin. di min.

$$\min \left\{ \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} u'^2 + f u \right) dx : u \in H_0^1((0, \pi)) \right\}$$

Da qui in poi è metodo diretto standard.

Dim. esistenza 3 Lax - Milgram (vedi def. corrispondente)

② L'operatore I è simmetrico

Dim. $u'' = f$
DBC

$v'' = g$
DBC

$u = I f$
 $v = I g$

$$\langle I f, g \rangle = \int_0^\pi u g = \int_0^\pi u v'' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{DBC su } u}}}{=} - \int_0^\pi u' v' = \int_0^\pi u'' v = \int_0^\pi f v = \langle f, I g \rangle$$

$\uparrow$ uso DBC su v

Oss. Vale un discorso analogo per integrali di altre derivate di ordine pari più di avere BC opportune

Oss. Bisognava verificare di avere abbastanza regolarità per l'integrazione per parti.

③ L'operatore I è compatto.

(L'idea brutale è che regolarizza, quindi restituisce un OUTPUT "migliore" dell'INPUT)

Dim. Si tratta di applicare Ascoli - Arzelà.

Cosa dobbiamo dimostrare: data $\{f_n\} \subseteq L^2$ limitata, se ne che $\{I f_n\}$ relativamente compatte in L^2 .

$$\{f_n\} \subseteq L^2 \text{ equilimitate} \Rightarrow \{I f_n\} \text{ equi } \frac{1}{2} - \text{H\"older}$$

Per avere equicontinuità di $\dot{u}_n$ osserviamo che $\dot{u}_n$ si annulla in $(0, \pi)$ almeno una volta per ROLLE.

Ora

$$\dot{u}_{n_k} \rightarrow v_\infty \quad \text{unif. su } [0, \pi]$$

Grazie alle DBC deduciamo che

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \text{unif. su } [0, \pi]$$

e la conv. unif. implica quella L^2 .

Varianti: $I: L^2 \rightarrow H^1_0$ è compatto?

Certo! Se $\{f_n\}$ sono limitate in L^2 , allora $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ e $\dot{u}_{n_k} \rightarrow v_\infty = \dot{u}_\infty$ unif., e questo implica conv. in H^1_0 .

$I: L^2 \rightarrow H^2$ è compatto? Assolutamente no (bisognerebbe fare l'esempio)

È almeno continuo? Sì! (facile esercizio)

④ L'operatore I è iniettivo (verifica quasi ovvia)

Quindi I rientra nel teo. spettrale e il suo inverso sarà un operatore di moltiplicazione non limitato.

⑤ Chi sono autovalori / autovettori di I ? E quindi anche dell'inverso?

Dim. Dobbiamo risolvere $If = \lambda f$, cioè (posto $u := If$)

$\lambda u = \ddot{u}$ Ora per bootstrap è tutto C^∞ , quindi le
soluzioni $\frac{1}{x}$, ma derivate sono derivate vere, quindi è analisi 1.
è lo stesso

Per det. il segno di λ , moltiplichiamo per u e int. per parti

$$\int_0^\pi \lambda u^2 = \int_0^\pi \ddot{u} u = - \int_0^\pi \dot{u}^2 \Rightarrow \lambda < 0$$

Le soluzioni sono del tipo $u(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(\dots)$

Usando le DBC si scopre che $a=0$ e $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$,
quindi $-\lambda = n^2$ con n intero.

Conclusione: gli autovalori di I sono del tipo $-\frac{1}{n^2}$ (devono andare a 0) con autovettori $\sin(nx)$

Dirichlet Laplacian Operatore non limitato uguale a
(meno) l'inverso di I .

In termini elementari

$$A: D(A) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

$$Au = -\ddot{u}$$

con dominio

$$D(A) := H^2((0, \pi)) \cap H_0^1((0, \pi))$$

$\uparrow$ DBC

L'operatore A è un operatore di moltiplicazione con autovalori n^2 corrispondenti alla base ortonormale $\{\sin(nx)\}$

$\uparrow$
valore mult. per
coeff. opportuno.

— o — o —

Altre RELEASE del Laplaciano

- **NEUMANN LAPLACIAN** $Au = -\ddot{u}$ con

$$D(A) := \{u \in H^2((0, \pi)) : \underbrace{\dot{u}(0) - \dot{u}(\pi)}_{\text{hanno senso in } H^2} = 0\}$$

Questo ha autovalori n^2 con autovettori $\cos(nx)$.

Apparentemente è l'inverso della "doppia primitiva" con NBC, ma non è vero che per ogni $f \in L^2$ posso risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = f \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

È necessario restringersi allo spazio H delle $f \in L^2((0, \pi))$ a media nulla, come si vede da

$$\dot{u}(\pi) - \dot{u}(0) = \int_0^\pi f(t) dt.$$

[Domanda: che succede facendo il metodo diretto sul funzionale?]

- **PERIODIC LAPLACIAN** Come prima $Au = -\ddot{u}$ con dominio

$$D(A) := \{u \in H^2((0, 2\pi)) : u(0) = u(2\pi), \dot{u}(0) = \dot{u}(2\pi)\}$$

Ancora una volta gli autovalori sono n^2 con autovettori $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ (autosp. di dim. 2)

Achtung! Qui c'è il 2π !!!!